Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27.–29. Mai 2015

a) Beschreiben Sie die Niveaulinien der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \max\bigl\{|x|, |y|\bigr\}$!

Lösung: f ist hier gerade die Maximumsnorm des Punkts (x,y); die Niveaumenge zum Funktionswert $a > 0$ ist das Quadrat mit Ecken $(\pm a, \pm a)$, die zu $a = 0$ ist die Menge $\bigl\{(0,0)\bigr\}$. Zu $a < 0$ sind die Niveaumengen leer.

b) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig?

Lösung: Da sie nur aus Grundrechenarten zusammengesetzt ist, auf jeden Fall in allen Punkten, in denen der Nenner nicht verschwindet, d.h. für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Im Nullpunkt ist sie genau dann stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$$

ist für alle (x,y) mit $\|(x,y)\| < \delta$, wobei es nicht darauf ankommt, mit welcher Norm wir arbeiten. Am einfachsten geht es meist mit der Maximumsnorm; arbeiten wir also damit. Für Punkte der Form $(x,0)$ mit $x \neq 0$ ist $f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x$; wenn wir $\|(x,0)\|_\infty = |x| < \delta$ wählen, ist also auch $|f(x,0)| < \delta$. Betrachten wir aber Punkte der Form $(0,y)$; so ist $f(0,y) = 1/y$, und offensichtlich gibt es schon zu $\varepsilon = 1$ kein $\delta > 0$, so daß $|1/y| < 1$ ist für alle y mit $|y| < \delta$. Somit ist die Funktion nicht stetig im Nullpunkt.

c) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig?

Lösung: Auch diese Funktion ist aus Grundrechenarten zusammengesetzt und hat einen Nenner, der nur im Nullpunkt verschwindet; daher ist auch sie stetig in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Bei Punkten der Form $(x,0)$ oder $(0,y)$ gibt es hier keine Schwierigkeiten; daher versuchen wir, den Funktionswert abzuschätzen:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| = |x| + |y| \;,$$

da $x^2 \ge 0$ und $y^2 \ge 0$. Setzen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ daher $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, so gilt für alle (x,y) mit $\|(x,y)\|_\infty < \delta$, daß sowohl $|x|$ als auch $|y|$ kleiner als δ sind und damit, wie wir gerade gezeigt haben, $|f(x,y)| < 2\delta = \varepsilon$. Damit ist die Stetigkeit von f im Nullpunkt gezeigt; f ist also auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

d) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ habe für $x = y = 0$ den Wert Null; für alle anderen Punkte (x,y) sei $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?
Hinweis: In Polarkoordinaten läßt sich das Problem einfacher lösen als in kartesischen.

Lösung: Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f eine rationale Funktion, deren Nenner nicht verschwindet, also stetig. Im Nullpunkt läßt sie sich am einfachsten dadurch untersuchen, daß wir zu Polarkoordinaten übergehen: Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2} = r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \;,$$

also ist $|f(x,y)| = |f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \le r^2 = x^2+y^2$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, ist daher für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\|(x,y)\|_2 < \delta \underset{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon}$ der Betrag von $f(x,y)$ minus $f(0,0) = 0$ kleiner als ε. Die Funktion ist also stetig in $(0,0)$ und damit auf ganz $\mathbb{R}^2$.

e) Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$?

Lösung: Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist das wieder problemlos, da wir eine rationale Funktion haben, deren Nenner nicht verschwindet. Im Nullpunkt ist nach der vorigen Aufgabe

$$|f(0+h, 0+k) - f(0,0| = |f(h,k)| \le h^2 + k^2 ,$$

also ist

$$f(0+h, 0+k) = f(0,0) + 0\cdot h + 0\cdot k + o\big(\sqrt{h^2+k^2}\big) .$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ differenzierbar mit Ableitung $\binom{0}{0}$.

f) Ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar?

Lösung: Für $(x,y) \neq (0,0)$ sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial yx}(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} .$$

Betrachten wir diese Ausdrücke in Polarkoordinaten, erhalten wir

$$\frac{2r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{2r^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi}{r^4} = 2r\cos\varphi\sin^2\varphi - 2r\cos^3\varphi\sin^2\varphi .$$

und

$$\frac{2r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2} - \frac{2r^5\cos^2\varphi\sin^3\varphi}{r^4} = 2r\cos^2\varphi\sin\varphi - 2r\cos^2\varphi\sin^3\varphi$$

Da Sinus und Kosinus nur Werte vom Betrag höchstens eins annehmen, ist beides nach der Dreiecksungleichung vom Betrag kleiner oder gleich $4|r|$. Damit folgt sofort, daß beide partielle Ableitungen zu stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ werden, wenn man den Funktionswert an der Stelle $(0,0)$ als Null definiert. Da die Ableitung an der Stelle $(0,0)$ gleich $\binom{0}{0}$ ist, ist ∇f somit eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetige Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

g) Untersuchen Sie die gleichen drei Fragen für $g(x,y) = e^{f(x,y)}$!

Lösung: Da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und die Hintereinanderausführung stetiger *bzw.* differenzierbarer Funktionen wieder stetig *bzw.* differenzierbar ist, ist auch g auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar.

h) Wie sieht es aus mit $h(x,y) = \log f(x,y)$?

Lösung: f nimmt zwar keine negativen Werte an, verschwindet aber auf den beiden Koordinatenachsen. Daher ist h nur auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ definiert und dort, aus dem gleichen Grund wie g, stetig differenzierbar.

i) Konvergiert die Folge der Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sin\big(x + \frac{1}{k}\big)$ punktweise gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Konvergiert sie gleichmäßig gegen eine solche Funktion?

Lösung: Da die Sinusfunktion stetig ist, konvergiert die Folge der Zahlen $f_k(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x) = \sin x$; die Folge konvergiert also punktweise gegen die Sinusfunktion. Die Differenz $f_k(x) - f(x)$ könnten wir mit der Additionsregel

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

ausdrücken; einfacher geht es mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Danach gibt es eine Zahl ξ mit $x \le \xi \le x + \frac{1}{k}$, so daß

$$\frac{\sin\left(x+\frac{1}{k}\right) - \sin x}{\frac{1}{k}} = \cos\xi \quad \text{oder} \quad \sin\left(x + \frac{1}{k}\right) - \sin x = \frac{\cos\xi}{k}$$

ist. Wegen $|\cos\xi| \le 1$ ist daher $|f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wählen wir also zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N so, daß $\frac{1}{N} < \varepsilon$ ist, gilt $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k \ge N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Somit konvergiert die Folge gleichmäßig.

j) Konvergiert die Folge der Funktionen $g_k\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ mit $g_k(x) = \tan\left(x - \frac{1}{k}\right)$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Konvergiert sie gleichmäßig gegen eine solche Funktion?

Lösung: Da der Tangens im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig ist und alle betrachteten Werte für x und für $x - \frac{1}{k}$ in diesem Intervall liegen, folgt die punktweise Konvergenz gegen $g(x) = \tan x$ genau wie eben beim Sinus.

Die Ableitung von $\tan x$ ist $1/\cos^2 x$; jetzt sagt uns also der Mittelwertsatz, daß

$$\tan x - \tan\left(x - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k\cos^2\xi}$$

ist für eine reelle Zahl ξ mit $x - \frac{1}{k} \le \xi \le x$. Da der Kosinus zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ monoton fällt, ist somit

$$\left|\tan x - \tan\left(x - \frac{1}{k}\right)\right| = \frac{1}{k\cos^2\xi} \ge \frac{1}{k\cos^2\left(x - \frac{1}{k}\right)} .$$

Lassen wir rechts x gegen $\frac{\pi}{2}$ gehen, erhalten wir den Grenzwert

$$\frac{\frac{1}{k}}{\sin^2\frac{1}{k}} .$$

Um das Verhalten dieses Werts für $k \to \infty$ zu untersuchen, können wir den Grenzwert von $\frac{z}{\sin^2 z}$ für $z \to 0$ bestimmen; nach DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2\sin z\cos z} ,$$

und das geht gegen unendlich, da $\sin z$ gegen Null geht. Somit können wir zu keinem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden derart, daß $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k \ge N$ und alle $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; die Konvergenz ist also nicht gleichmäßig.

k) Untersuchen Sie die Mengen

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le x - [x]\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < x - [x]\right\}$$

auf Zusammenhang und Wegzusammenhang!

Lösung: A ist wegzusammenhängend und damit erst recht auch zusammenhängend, da die wegzusammenhängende x-Achse in A liegt und jeder Punkt von A durch eine Strecke in A mit der x-Achse verbunden werden kann.

Konkret seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte aus A. Wir verbinden zunächst (x_1, y_1) mit $(x_1, 0)$ durch die Strecke aus allen Punkten (x_1, t) mit $0 \le t \le y$; sie liegt in A, denn $0 \le t \le y \le x_1 - [x_1]$. Als nächstes gehen auf der x-Achse von $(x_1, 0)$ nach $(x_2, 0)$, und dann auf der Strecke von $(x_2, 0)$ nach (x_2, y_2) zum Zielpunkt.

B enthält keine Punkte mit ganzzahliger x-Koordinate, denn für solche Punkte ist $x = [x]$, so daß y die Ungleichung $0 < y < 0$ erfüllen müßte. Damit ist B nicht zusammenhängend: Die offenen Mengen $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ und $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ überdekken B zwar gemeinsam, aber keine allein. Da jede wegzusammenhängende Menge zusammenhängend ist, ist B erst recht nicht wegzusammenhängend.

l) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für $|x| \le 10$ und $f(x) = 0$ sonst eine Funktion mit kompaktem Träger?

Lösung: *Nein,* denn sie ist an den Stellen $x = \pm 10$ unstetig.

m) Finden Sie eine approximierende Folge für f!

Lösung: Da der Träger von f das kompakte Intervall $[-10, 10]$ ist, sind nur die beiden Unstetigkeitsstellen problematisch. Die Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_k(x) = \begin{cases} |x| & \text{falls } |x| \le 10 \\ 10 - 10k\big(|x| - 10\big) & \text{falls } 10 \le |x| \le 10 + \frac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind stetig mit Träger $\left[-10 - \frac{1}{k},\ 10 + \frac{1}{k}\right]$, liegen also in $K_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge der $f_k(x)$ gegen $f(x)$, denn für $|x| \le 10$ oder $|x| \ge 11$ ist $f(x) = f_k(x)$ für alle k, und für $10 < |x| < 11$ gibt es ein N derart, daß $|x| - 10 > 1/N$. Für $k \ge N$ ist dann $f_k(x) = f(x)$, d.h. die Folge der $f_k(x)$ konvergiert gegen $f(x)$.
Schließlich ist die Folge der f_k auch eine CAUCHY-Folge, denn für $\ell \ge k$ ist

$$\|f_k - f_\ell\|_1 = \int_{-10-\frac{1}{k}}^{-10} |f_k(x) - f_\ell(x)|\, dx + \int_{10}^{10+\frac{1}{k}} |f_k(x) - f_\ell(x)|\, dx\,,$$

und da die Integranden überall kleiner oder gleich zehn sind, ist das höchstens gleich $2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{k} = \frac{20}{k}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{20}{N} < \varepsilon$ ist; für $\ell \ge k \ge N$ ist damit $\|f_k - f_\ell\|_1 < \varepsilon$. Somit ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für f.

n) Zeigen Sie direkt, daß die Folge der f_k bezüglich der L^1-Norm gegen f konvergiert!

Lösung:

$$\|f_k - f\|_1 = \int_{-10-\frac{1}{k}}^{10} \Big(10 - 10k\big(|x| - 10\big)\Big) dx + \int_{10}^{10+\frac{1}{k}} \Big(10 - 10k\big(|x| - 10\big)\Big) dx\,.$$

Jedes der beiden Integrale berechnet die Fläche eine Dreiecks mit einer Kante der Länge $\frac{1}{k}$ und der Höhe zehn, hat also den Wert $\frac{5}{k}$. Damit ist

$$\|f_k - f\|_1 = \frac{10}{k}\,.$$

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ sei N eine natürliche Zahl, die größer ist als $\frac{10}{\varepsilon}$; für $k \ge N$ ist dann

$$\|f_k - f\|_1 = \frac{10}{k} \le \frac{10}{N} < \varepsilon\,.$$

Somit konvergiert die Folge der f_k bezüglich der L^1-Norm gegen f.

o) Was ist $\int_{\mathbb{R}} f$ und $\int_{\mathbb{R}} f_k$?

Lösung: Das erste Integral ist die Fläche zweier Dreiecke mit Grundkante zehns und Höhe zehn, also $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 100$. Beim zweiten kommen noch zwei Dreiecke mit Grundkante $\frac{1}{k}$ und Höhe zehn dazu; hier ist der Wert also $100 + \frac{10}{k}$.

p) R sei die Raute mit Ecken $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Berechnen Sie $\int_R x^2 y^2$, indem Sie die Raute zu einem achsenparallelen Quadrat drehen!

Lösung: Wie aus der Linearen Algebra wissen, ist eine Drehung um den Nullpunkt mit Winkel α gegeben durch die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \big(x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha\big) \end{cases}$$

Die JACOBI-Matrix dieser linearen Abbildung ist einfach gleich der Abbildungsmatrix, und die hat bei einer Drehung natürlich Determinante eins. Da die Raute ein Quadrat mit Kantenlänge $\sqrt{2}$ ist, wenden wir sie für $\alpha = 45°$ an auf das Quadrat Q mit Ecken $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$, haben dann also die Abbildung

$$\begin{cases} Q \to R \\ (u, v) \mapsto \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u-v), \dfrac{\sqrt{2}}{2}(u+v)\right) \end{cases}$$

Nach der Transformationsformel ist dann

$$\int_R x^2y^2 = \int_Q \frac{(u-v)^2(u+v)^2}{4} = \int_Q \frac{(u^2-v^2)^2}{4} = \int_Q \frac{u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4},$$

was wir durch eindimensionale Integrationen ausrechnen können als

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4} \, du \right) dv = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{u^5}{20} - \frac{u^3v^2}{6} + \frac{uv^4}{4} \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \right) dv$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}v^2}{3} + \frac{\sqrt{2}v^4}{2} \right) dv = \frac{8}{5} - \frac{16}{9} + \frac{8}{5} = \frac{16}{5} - \frac{16}{9} = \frac{64}{45}.$$

q) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$!

Lösung: In Polarkoordinaten wird der Integrand zu e^{-r}, das Integral also zum Integral von re^{-r} über $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi]$. Durch partielle Integration erhalten wir leicht eine Stammfunktion von re^{-r}:

$$\int re^{-r} \, dr = r \cdot (-e^{-r}) - \int 1 \cdot (-e^{-r}) \, dr = -re^{-r} + \int e^{-r} \, dr = -(r+1)e^{-r} + C.$$

Somit ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} re^{-r} \, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} -(r+1)e^{-r} \Big|_0^{\infty} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = 2\pi.$$