WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27.–29. Mai 2015

a) Beschreiben Sie die Niveaulinien der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \max\{|x|\,,|y|\}$!

b) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig?

c) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig?

d) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ habe für $x = y = 0$ den Wert Null; für alle anderen Punkte (x,y) sei $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?
Hinweis: In Polarkoordinaten läßt sich das Problem einfacher lösen als in kartesischen.

e) Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$?

f) Ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar?

g) Untersuchen Sie die gleichen drei Fragen für $g(x,y) = e^{f(x,y)}$!

h) Wie sieht es aus mit $h(x,y) = \log f(x,y)$?

i) Konvergiert die Folge der Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sin\bigl(x + \frac{1}{k}\bigr)$ punktweise gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Konvergiert sie gleichmäßig gegen eine solche Funktion?

j) Konvergiert die Folge der Funktionen $g_k\colon \bigl(0, \frac{\pi}{2}\bigr) \to \mathbb{R}$ mit $g_k(x) = \tan\bigl(x - \frac{1}{k}\bigr)$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Konvergiert sie gleichmäßig gegen eine solche Funktion?

k) Untersuchen Sie die Mengen
$$A = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le y \le x - [x]\bigr\} \quad \text{und} \quad B = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 < y < x - [x]\bigr\}$$
auf Zusammenhang und Wegzusammenhang!

l) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für $|x| \le 10$ und $f(x) = 0$ sonst eine Funktion mit kompaktem Träger?

m) Finden Sie eine approximierende Folge für f !

n) Zeigen Sie direkt, daß die Folge der f_k bezüglich der L^1-Norm gegen f konvergiert!

o) Was ist $\int_{\mathbb{R}} f$ und $\int_{\mathbb{R}} f_k$?

p) R sei die Raute mit Ecken $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Berechnen Sie $\int_R x^2y^2$, indem Sie die Raute zu einem achsenparallelen Quadrat drehen!

q) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$!