WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20.–22. Mai 2015

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, daß die Funktionen $f(x,0)$ und $f(0,y)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar sind!

Lösung: Das ist klar, da $f(x,0) = f(0,y) = 0$ ist.

b) Für welche $a \neq 0$ ist (x, ax) eine stetige Funktion von x? Für welche ist das stetig differenzierbar?

Lösung: $f(x,ax) = \dfrac{a^2x^6}{x^8 + a^4x^4} = \dfrac{a^2x^2}{x^4 + a^4}$ für $x \neq 0$; für $x \to 0$ geht der Zähler gegen Null und der Nenner gegen $a^4 \neq 0$, also ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x,ax) = 0 = f(0,0)$. Somit ist die Funktion auch im Nullpunkt stetig. Als rationale Funktion, deren Nenner nirgends verschwindet, ist sie natürlich auch stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dx} f(x,ax) = \frac{2a^2x(x^4+a^4) - 4a^2x^5}{(x^4+a^4)^2} = \frac{2a^2x}{x^4+a^4} - \frac{4a^2x^5}{(x^4+a^4)^2} .$$

c) Ist f im Nullpunkt stetig und/oder differenzierbar?

Lösung: Für jedes $c \neq 0$ ist $f(c,c^2) = \frac{c^8}{c^8+c^8} = \frac{1}{2}$; für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ kann es daher kein $\delta > 0$ geben, so daß $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y)\| < \delta$: Nehmen wir etwa die Maximumsnorm und ein c mit $|c| \leq 1$, so ist $\big\|(c,c^2)\big\| = |c|$ für hinreichend kleine Werte von c kleiner als jedes vorgegebene $\delta > 0$, aber $f(c,c^2) = \frac{1}{2} > \varepsilon$. Damit ist f im Nullpunkt auch nicht differenzierbar.

d) Hat f im Nullpunkt ein Extremum oder einen Sattelpunkt?

Lösung: Da $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(0,0) = 0$. hat f im Nullpunkt ein Minimum.

e) Lösen Sie die obigen Aufgaben für die neue Funktion

$$g(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,!$$

Lösung: $g(x,0) = g(0,y) = 0$ sind beides stetige differenzierbare Funktionen und auch

$$g(x,ax) = \frac{ax^2}{1+(a^2+1)x^2}$$

ist als rationale Funktion, deren Nenner nirgends verschwindet, stetig differenzierbar. Da auch $g(x,y)$ eine rationale Funktion ist, deren Nenner nirgends verschwindet, ist auch g stetig differenzierbar. Der Nullpunkt ist ein Sattelpunkt, denn die Funktion $f(x,x)$ hat für $x = 0$ ein Minimum, $f(x,-x)$ aber ein Maximum.

(Masochisten können die HESSE-Matrix im Nullpunkt ausrechnen; sie ist einfach $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, gehört also zur indefiniten quadratischen Form $2xy$. Ihre Eigenvektoren sind $\binom{1}{1}$ zum Eigenwert eins und $\binom{1}{-1}$ zum Eigenwert minus eins.)

f) Bestimmen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$?

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x(y - 3x^2) - 6x(y - x^2) = 12x^3 - 8xy = 4x(3x^2 - 2y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (y - 3x^2) + (y - x^2) = 2y - 4x^2$$

verschwinden beide, wenn $x = y = 0$ ist. Für $x \neq 0$ verschwindet $\frac{\partial f}{\partial x}$ genau dann, wenn $2y = 3x^2$ ist, $\frac{\partial f}{\partial y}$ aber nur dann, wenn $2y = 4x^2$; beides gleichzeitig ist für $x \neq 0$ nicht möglich. Also ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 36x^2 - 8y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$$

Die JACOBI-Matrix im Nullpunkt ist somit $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, und sie ist nur semidefinit.

$f(x, 0) = 3x^4$ hat bei $x = 0$ ein Minimum, $f(0, y) = y^2$ entsprechend bei $y = 0$. Für $a \neq 0$ hat $f(x, ax) = (ax - x^2)(ax - 3x^2) = x^2(a - x)(a - 3x) = x^2(3x^2 - 4ax + a^2)$ die erste Ableitung $12x^3 - 12ax^2 + 2a^2x$, die bei $x = 0$ verschwindet, während die zweite $36x^2 - 24ax + 2a^2$ bei $x = 0$ den positiven Wert $2a^2$ annimmt. Also hat auch $f(x, ax)$ bei $x = 0$ ein Minimum. Trotzdem hat f im Punkt $(0, 0)$ kein Minimum, denn

$$f(c, 2c^2) = (2c^2 - c^2)(2c^2 - 3c^2) = -c^4$$

ist für alle $c \neq 0$ negativ. Es gibt daher in jeder Umgebung des Nullpunkts sowohl Punkte, in denen $f(x, y) < f(0, 0) = 0$ ist, also auch solche mit $f(x, y) > f(0, 0)$, so daß der Nullpunkt kein Extremum ist. Er ist auch kein Sattelpunkt, denn es gibt keine Richtung, in der der Nullpunkt ein Maximum ist.

g) Hat f auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ ein Extremum?

Lösung: Ja; da die Kreislinie kompakt ist und f als Polynom eine stetige Funktion ist, nimmt f dort sowohl sein Maximum als auch sein Minimum an.

h) $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen und $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, daß die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ und } f(x) \le y \le g(x)\}$ wegzusammenhängend ist!

Lösung: (x_1, y_1) und (x_2, y_2) seien zwei Punkte aus A; o.B.d.A. sei $x_1 \le x_2$. Dann läßt sich zunächst (x_1, y_1) durch eine ganz in A liegende Strecke mit $\big(x_1, f(x_1)\big)$ verbinden, dieser Punkt wiederum über die ganz in A liegende Kurve $t \mapsto \big(t, f(t)\big)$ über dem Intervall $[x_1, x_2]$ $\big(x_2, f(x_2)\big)$, und von dort kommen wir wiederum mit einer in A liegende Strecke zum Punkt (x_2, y_2).

i) Gilt dies auch, wenn man auf die Stetigkeitsannahme verzichtet?

Lösung: *Nein:* Sei etwa $f(x) = 0$ und $g(x) = 2$ für $x \le 0$, aber $f(x) = 3$ und $g(x) = 5$ für $x > 0$; das Intervall $[a, b]$ sei zum Beispiel $[-10, 10]$. Falls es einen Weg $\gamma\colon [0, 1] \to A$ gäbe mit $\gamma(0) = (-1, 1)$ und $\gamma(1) = (1, 4)$, so gälte für dessen Komponenten γ_1, γ_2, daß beides stetige Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma_2(t) \in [0, 2]$ falls $\gamma_1(t) \leq 0$, aber $\gamma_2(t) \in [3, 5]$, falls $\gamma_1(t) > 0$. Das kann aber nicht sein, denn nach dem Zwischenwertsatz muß γ_1 auch den Wert Null annehmen; an einem solchen Punkt läge dann der linksseitige Grenzwert von γ_2 im Intervall $[0, 2]$, der rechtsseitige aber in $[3, 5]$, was bei einer stetigen Funktion nicht vorkommen kann.

j) Gilt dies auch, wenn man auf die Annahme $f(x) \leq g(x)$ verzichtet?

Lösung: *Nein;* ist beispielsweise $[a, b] = [-2, 2]$, $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = x^2$, so gibt es keine Punkte $(x, y) \in A$ mit $x \in (-1, 1)$. Damit kann es auch keinen Weg geben, der die Punkte $(-2, 0)$ und $(2, 0)$ verbindet.

k) Welche Fläche hat die Menge A?

Lösung: Nach einer der grundlegenden Eigenschaften des RIEMANN-Integrals ist das $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$.

l) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller innerer, äußerer und Randpunkte von A!

Lösung: Innere Punkte sind die, bei denen sowohl die x- als auch die y-Koordinate in beide Richtungen um irgendeinen Betrag ε variiert werden kann, ohne daß der Punkt aus der Menge A herausfällt. Das Innere ist daher

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \;\text{ und }\; f(x) < y < g(x)\big\}.$$

Äußere Punkte sind innere Punkte des Komplements; da A abgeschlossen und sein Komplement somit offen ist, sind das gerade die sämtlichen Punkte von $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Randpunkte schließlich haben in jeder Umgebung sowohl Punkte aus A als auch solche aus dem Komplement; der Rand ist also die Vereinigung der vier Randlinien:

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a \;\text{ und }\; f(a) \leq y \leq g(a)\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = b \;\text{ und }\; f(b) \leq y \leq g(b)\big\}$$
$$\cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \;\text{ und }\; y = f(x)\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \;\text{ und }\; y = g(x)\big\}.$$

m) Zeigen Sie, daß das für zwei positive reelle Zahlen a, b gilt: Das äußere Maß der Menge $E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\Big\}$ ist höchstens gleich $4ab$!

Lösung: Da $\frac{x^2}{a^2}$ und $\frac{y^2}{b^2}$ nie negativ werden können, muß für jeden Punkt $(x, y) \in E$ gelten, daß $|x| \leq a$ und $|y| \leq b$ sind. Somit liegt E ganz im Rechteck mit Ecken $(\pm a, \pm b)$, dessen Fläche $4ab$ ist. Daher gibt es eine Überdeckung durch „Quader“ mit einem Gesamtvolumen von $4ab$, d.h. $\mu^*(E) \leq 4ab$.

n) Richtig oder falsch: Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, so ist auch ihre Summe eine Norm.

Lösung: *Richtig:* Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\|\lambda x\|_1 + \|\lambda x\|_2 = |\lambda| \cdot \|x\|_1 + |\lambda| \cdot \|x\|_2 = |\lambda| \cdot \big(\|x\|_1 + \|x\|_2\big).$$

Auch bei der Dreiecksungleichung können wir die beiden Seiten für die einzelnen Normen einfach addieren. Schließlich ist mit $\|x\|_1$ und $\|x\|_2$ auch die Summe nichtnegativ, und wenn sie Null ist, müssen beide Summanden verschwinden, d.h. $\|x\|_1 = \|x\|_2 = 0$. Damit muß x der Nullpunkt des $\mathbb{R}^n$ sein.

o) Die JACOBI-Matrix der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + 2y) & 2\cos(x + 2y) \\ -6x\sin(3x^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Was können Sie über f sagen?

Lösung: Als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ hat f zwei Komponenten $g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}$. Wir wissen also, daß

$$g_x = \cos(x+2y), \quad g_y = 2\cos(x+2y), \quad h_x = -6x\sin(3x^2) \quad \text{und} \quad h_y = 0$$

ist. Die Funktion h hängt somit nicht von y ab, ist also eine Funktion nur von x mit Ableitung $-6x\sin(3x^2)$. Durch partielle Integration oder Integration nach der Substitutionsregel oder einfach durch Erraten nach der Kettenregel sieht man, daß $h(x) = \cos(3x^2) + a$ mit einer beliebigen Konstante $a \in \mathbb{R}$ sein muß.
Die Ableitung von g nach x ist $\cos(x+2y)$; somit ist $g(x,y) = \sin(x+2y)$ plus einer Funktion, die nur von y abhängt. Da $\frac{\partial}{\partial y}\sin(x+2y) = 2\cos(x+2y)$ ist, kann letztere Funktion nur eine Konstante sein, d.h. $g(x) = \sin(x+2y) + b$ mit $b \in \mathbb{R}$.

p) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Was ist $\int 3\cos(x)\cdot f'(\sin x)\,dx$?

Lösung: Wir substituieren $u = \sin x$; dann ist $du = \cos x\,dx$, also

$$\int 3\cos(x)\cdot f'(\sin x)\,dx = \int 3f'(u)\,du = 3f(u) + C = 3f(\sin x) + C\,.$$

q) Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x+19}\,dx, \quad I_2 = \int \tan x\,dx \quad \text{und} \quad I_3 = \int x^3\sin(x^2)\,dx\,!$$

Lösung: Bei I_1 ist die Ableitung des Nenners $3x^2+6x+9$, also das Dreifache des Zählers. Da $\log f(x)$ die Ableitung $f'(x)/f(x)$ hat, ist

$$I_1 = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+6x+9}{x^3+3x^2+9x+19}\,dx = \frac{1}{3}\log\left|x^3+3x^2+9x+19\right| + C\,.$$

Auch die Stammfunktionen des Tangens können wir so bestimmen, denn $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, und die Ableitung des Kosinus ist der negative Sinus, d.h.

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C\,.$$

Bei I_3 machen wir die Substitution $z = x^2$ mit $dz = 2x\,dx$; dann ist

$$I_3 = \frac{1}{2}\int z\sin z\,dz\,.$$

Partielle Integration mit $u = z$ und $v' = \sin z$ macht daraus wegen $u' = 1$ und $v = -\cos z$

$$\int z\sin z\,dz = -z\cos z + \int \cos z\,dz = \sin z - z\cos z + C\,.$$

Somit ist

$$I_3 = \frac{\sin x^2 - x^2\cos x^2}{2} + C\,,$$

wobei die Integrationskonstante hier natürlich nur halb so groß ist wie in der Formelzeile darüber.

r) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0), (1,0), (1,1)$ und $(0,1)$. Berechnen Sie $\int_Q xye^{-x^2-y^2}$!

Lösung: $e^{-x^2-y^2}$ hat $-2xe^{-x^2-y^2}$ als partielle Ableitung nach x und $-2ye^{-x^2-y^2}$ als partielle Ableitung nach y. Daher ist

$$\int_Q xye^{-x^2-y^2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 xye^{-x^2-y^2}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{y}{2}e^{-x^2-y^2}\Big|_0^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{y}{2}e^{-y^2}(e^{-1}-1) \right) dy = \frac{1}{4}(e^{-1}-1)e^{-y^2}\Big|_0^1 = \frac{(e^{-1}-1)^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{4e^2}\,.$$

s) Zeigen Sie, daß $\int_Q \sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2}$ nicht größer als der gerade berechnete Wert sein kann!

Lösung: Da die Sinuslinie im Bereich der positiven x-Achse überall unter der Winkelhalbierenden liegt, ist $\sin(xy) \le xy$ für alle $(x,y) \in Q$. Damit ist wegen der Positivität der Exponentialfunktion auch $\sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2} \le xye^{-x^2-y^2}$ für alle $(x,y) \in Q$. Nach der Monotonieregel ist daher

$$\int_Q \sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \int_Q xye^{-x^2-y^2}\,.$$

t) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0), (\frac{\pi}{4},0), (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ und $(0,\frac{\pi}{4})$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_Q \cos(x+y)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \sqrt{2}-1\,!$$

Lösung: Da $e^{-x^2-y^2} \le 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ist

$$\int_Q \cos(x+y)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \int_Q \cos(x+y) = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/4} \cos(x+y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin(x+y)\Big|_0^{\pi/4} dy = \int_0^{\pi/4} \left(\sin(y+\tfrac{\pi}{4}) - \sin y\right) dy = \left(-\cos(y+\tfrac{\pi}{4}) + \cos y\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{4} - \cos 0 = 0 + 2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2}-1\,.$$