Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20.–22. Mai 2015

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, daß die Funktionen $f(x,0)$ und $f(0,y)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar sind!

b) Für welche $a \neq 0$ ist (x, ax) eine stetige Funktion von x? Für welche ist das stetig differenzierbar?

c) Ist f im Nullpunkt stetig und/oder differenzierbar?

d) Hat f im Nullpunkt ein Extremum oder einen Sattelpunkt?

e) Lösen Sie die obigen Aufgaben für die neue Funktion

$$g(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,!$$

f) Bestimmen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$?

g) Hat f auf der Kreislinie $x^2+y^2=1$ ein Extremum?

h) $f,g\colon [a,\,b] \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,\,b]$. Zeigen Sie, daß die Menge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ wegzusammenhängend ist!

i) Gilt dies auch, wenn man auf die Stetigkeitsannahme verzichtet?

j) Gilt dies auch, wenn man auf die Annahme $f(x) \leq g(x)$ verzichtet?

k) Welche Fläche hat die Menge A?

l) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller innerer, äußerer und Randpunkte von A!

m) Zeigen Sie, daß das für zwei positive reelle Zahlen a,b gilt: Das äußere Maß der Menge $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ ist höchstens gleich $4ab$!

n) *Richtig oder falsch:* Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, so ist auch ihre Summe eine Norm.

o) Die Jacobi-Matrix der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y) \\ -6x\sin(3x^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Was können Sie über f sagen?

p) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Was ist $\int 3\cos(x) \cdot f'(\sin x)\,dx$?

q) Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x+19}\,dx, \quad I_2 = \int \tan x\,dx \quad \text{und} \quad I_3 = \int x^3\sin(x^2)\,dx\,!$$

r) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0), (1,0), (1,1)$ und $(0,1)$. Berechnen Sie $\int_Q xye^{-x^2-y^2}$!

s) Zeigen Sie, daß $\int_Q \sin(xy) \cdot e^{-x^2-y^2}$ nicht größer als der gerade berechnete Wert sein kann!

t) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0), (\frac{\pi}{4},0), (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ und $(0,\frac{\pi}{4})$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_Q \cos(x+y) \cdot e^{-x^2-y^2} \leq \sqrt{2}-1\,!$$