WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13.+15. Mai 2015

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0),(1,0),(1,1)$ und $(0,1)$. Berechnen Sie $\int_Q xye^{-x^2-y^2}$!

Lösung: $e^{-x^2-y^2}$ hat $-2xe^{-x^2-y^2}$ als partielle Ableitung nach x und $-2ye^{-x^2-y^2}$ als partielle Ableitung nach y. Daher ist

$$\int_Q xye^{-x^2-y^2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 xye^{-x^2-y^2}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(-\frac{y}{2}e^{-x^2-y^2}\Big|_0^1\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{y}{2}e^{-y^2}(e^{-1}-1)\right)dy = \frac{1}{4}(e^{-1}-1)e^{-y^2}\Big|_0^1 = \frac{(e^{-1}-1)^2}{4} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2e}+\frac{1}{4e^2}\,.$$

b) Zeigen Sie, daß $\int_Q \sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2}$ nicht größer als der gerade berechnete Wert sein kann!

Lösung: Da die Sinuslinie im Bereich der positiven x-Achse überall unter der Winkelhalbierenden liegt, ist $\sin(xy) \le xy$ für alle $(x,y)\in Q$. Damit ist wegen der Positivität der Exponentialfunktion auch $\sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2} \le xye^{-x^2-y^2}$ für alle $(x,y)\in Q$. Nach der Monotonieregel ist daher

$$\int_Q \sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \int_Q xye^{-x^2-y^2}\,.$$

c) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0),(\frac{\pi}{4},0),(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ und $(0,\frac{\pi}{4})$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_Q \cos(x+y)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \sqrt{2}-1\,!$$

Lösung: Da $e^{-x^2-y^2} \le 1$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ist

$$\int_Q \cos(x+y)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \int_Q \cos(x+y) = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\pi/4}\cos(x+y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin(x+y)\Big|_0^{\pi/4} dy = \int_0^{\pi/4}\left(\sin(y+\tfrac{\pi}{4})-\sin y\right)dy = \left(-\cos(y+\tfrac{\pi}{4})+\cos y\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -\cos\tfrac{\pi}{2}+\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos\tfrac{\pi}{4}-\cos 0 = 0+2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1\,.$$

d) Was ist $\mu^*\big(\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le\frac{\pi}{2} \text{ und } \cos x \ge c\}\big)$?

Lösung: Die Menge, um die es hier geht ist das Intervall $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ falls $c\le 0$ ist, und sie ist leer für $c>1$. Ansonsten ist sie das Intervall von $-\arccos c$ bis $\arccos c$. Da das äußere Maß eines Intervalls gleich seiner Länge ist, folgt

$$\mu^*\big(\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le\frac{\pi}{2} \text{ und } \cos x\ge c\}\big) = \begin{cases} 0 & \text{falls } c\ge 1\\ 2\arccos c & \text{falls } 0\le c\le 1\\ \pi & \text{falls } c\le 0\end{cases}\,.$$

e) Welche Schranke liefert die Ungleichung von Tschebyscheff für dieses Maß?

Lösung:

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \cos x & \text{falls } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

ist eine Funktion mit kompaktem Träger, denn wegen $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist sie stetig, und ihr Träger ist das kompakte Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; die Ungleichung von TSCHEBYSCHEFF ist also anwendbar. Die L^1-Norm von f ist

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin -\frac{\pi}{2} = 1 - (-1) = 2\,,$$

also ist für $c > 0$

$$\mu^*\left(\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le \frac{\pi}{2} \text{ und } \cos x \ge c\}\right) \le \frac{2}{c}\,.$$

f) Für welche Werte von c liefert das Ergebnis der vorigen Aufgabe eine nützliche Aussage?

Lösung: Da das Intervall, auf dem f nicht verschwindet, die Länge π hat, ist das Ergebnis nur nützlich, wenn $2/c < \pi$, also $c > 2/\pi \approx 0{,}6366$ ist. Für $c \ge 1$ ist das äußere Maß offensichtlich null; auch da nützt die Aussage wenig.

g) Die stetigen Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien null für $x \le a - \frac{1}{k}$ und $x \ge b + \frac{1}{k}$, eins für $x \in [a, b]$ und linear in den Intervallen $[a - \frac{1}{k}, a]$ und $[b, b + \frac{1}{k}]$. Geben Sie diese Funktionen explizit an und zeigen Sie, daß sie eine approximierende Folge für

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

bilden!

Lösung: Da $f_k(a + \frac{1}{k}) = 0$ ist und $f_k(a) = 1$, ist

$$f_k(x) = k \cdot (x - a + \frac{1}{k}) = k(x - a) + 1 \quad \text{für } x \in [a - \tfrac{1}{k}, a]\,,$$

und entsprechend ist

$$f_k(x) = 1 + k(b - x) = (1 + kb) - kx \quad \text{für } x \in [b, b + \tfrac{1}{k}]\,.$$

Der Träger von f_k ist $[a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}]$; alle f_k sind daher wegen ihrer Stetigkeit Funktionen mit kompaktem Träger.

$$\|f_k - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_k - f| = \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(x) - f(x)| \, dx = \int_{a-\frac{1}{k}}^{a} k(x - a)\, dx + \int_{b}^{b+\frac{1}{k}} \big((1 + kb) - kx\big)\, dx$$

$$= k\frac{x^2}{2} - akx\Big|_{a-\frac{1}{k}}^{a} + (1 + kb)x - k\frac{x^2}{2}\Big|_{b}^{b+\frac{1}{k}}$$

$$= k \cdot \frac{a^2 - a^2 + 2\frac{a}{k} - \frac{1}{k^2}}{2} - ak\big(a - (a - \frac{1}{k})\big) + (1 + kb)\big(b + \frac{1}{k} - b\big) - k \cdot \frac{b^2 + 2\frac{b}{k} + \frac{1}{k^2} - b^2}{2}$$

$$= a + \frac{1}{2k} - a + \frac{1 + kb}{k} - b + \frac{1}{2k} + b = \frac{1}{k}$$

ist offensichtlich eine Nullfolge; daher konvergiert die Folge der f_k in der L^1-Norm gegen f. Die Folge der $f_k(x)$ konvergiert sogar für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$, denn für $x \in [a, b]$ ist $f_k(x) = f(x) = 1$ für alle k, und für $x \notin [a, b]$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $x \notin [a - \frac{1}{k}, b +$

$\frac{1}{k}]$; daher ist für alle $\ell \geq k$ hier $f_\ell(x) = f(x) = 0$. Also sind alle Forderungen an eine approximierende Folge erfüllt.

h) Finden Sie eine approximierende Folge für die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [a_1,\, b_1] \times \cdots \times [a_n,\, b_n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Lösung: Für $i = 1, \ldots, n$ sei ${}^{i}f_k$ die Funktion aus der letzten Aufgabe für das Intervall $[a_i,\, b_i]$. Dann bilden die Funktionen g_k mit

$$g_k(x) = {}^{1}f_k(x) \cdots {}^{n}f_k(x)$$

eine solche Folge.