

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13.+15. Mai 2015

- a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$. Berechnen Sie $\int_Q xy e^{-x^2-y^2} !$
b) Zeigen Sie, daß $\int_Q \sin(xy) \cdot e^{-x^2-y^2}$ nicht größer als der gerade berechnete Wert sein kann!
c) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0)$, $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ und $(0, \frac{\pi}{4})$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_Q \cos(x+y) \cdot e^{-x^2-y^2} \leq \sqrt{2} - 1 !$$

- d) Was ist $\mu^* (\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } \cos x \geq c\})$?
e) Welche Schranke liefert die Ungleichung von Tschebyscheff für dieses Maß?
f) Für welche Werte von c liefert das Ergebnis der vorigen Aufgabe eine nützliche Aussage?
g) Die stetigen Funktionen $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien null für $x \leq a - \frac{1}{k}$ und $x \geq b + \frac{1}{k}$, eins für $x \in [a, b]$ und linear in den Intervallen $[a - \frac{1}{k}, a]$ und $[b, b + \frac{1}{k}]$. Geben Sie diese Funktionen explizit an und zeigen Sie, daß sie eine approximierende Folge für

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

bilden!

- h) Finden Sie eine approximierende Folge für die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$