

### Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6.–8. Mai 2015

- a) Welche der folgenden Mengen ist eine Nullmenge?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

**Lösung:** A ist eine Nullmenge als Bild der  $x$ -Achse, einer Nullmenge, unter der stetig differenzierbaren Funktion  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $(x, y) \mapsto (x, \sin x)$ ; genauso auch B als Bild unter  $(x, y) \mapsto (\cos x, \sin x)$ .

- b)  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  seien zwei stetige Abbildungen auf  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie: Falls  $f(x) = g(x)$  für fast alle  $x \in D$ , ist  $f = g$ .

**Lösung:** Wir betrachten die Menge A aller  $x_0 \in D$  mit  $f(x_0) \neq g(x_0)$ . Nach Voraussetzung ist dies eine Nullmenge; falls sie leer ist, sind wir fertig. Andernfalls sei  $x_0$  ein Punkt aus A. Da eine Nullmenge keine inneren Punkte hat, liegen in jeder Umgebung von  $x_0$  Punkte, die nicht aus A sind. Wir wählen jeweils einen solchen Punkt  $x_k$  aus der Kugel mit Radius  $1/k$  um  $x_0$ . Dann ist  $f(x_k) = g(x_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und da die Folge der  $x_k$  gegen  $x_0$  konvergiert, ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von  $f$  und  $g$

$$f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = g(x_0),$$

im Widerspruch zur Annahme  $x_0 \in A$ . Also ist  $A = \emptyset$  und  $f = g$ .

- c) Zeigen Sie, daß durch  $f_k(x) = \max\{0, k - k^2|x|\}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine Funktion aus  $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  definiert wird!

**Lösung:**  $k - k^2|x|$  verschwindet genau dann, wenn  $|x| = 1/k$  ist; wird der Betrag größer, wird der Ausdruck negativ und damit  $f_k(x) = 0$ . Der Träger von  $f_k$  ist daher das abgeschlossene Intervall  $[-1/k, 1/k]$ , also kompakt. Außerdem ist  $f_k$  stetig, denn im Innern dieses Intervalls ist es durch die stetigen Funktionen  $k + k^2x$  für  $x < 0$  und  $k - k^2x$  für  $x > 0$  gegeben; die für  $x = 0$  beide den Wert  $k$  haben. An den Intervallgrenzen ist die Funktionen, genau wie außerhalb, gleich Null. Ihr Graph ist also bis zum Punkt  $-1/k$  und ab dem Punkt  $x = 1/k$  die  $x$ -Achse; dazwischen ist es ein Dreieck mit Spitze bei  $(0, k)$ .

- d) Berechnen Sie  $\int_{\mathbb{R}} f_k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k$ !

**Lösung:**

$$\int_{\mathbb{R}} f_k = \int_{-1/k}^{1/k} (k - k^2|x|) dx = 2 \int_0^{1/k} (k - k^2x) dx = 2 \left( kx - k^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1/k} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 1,$$

wie es sich für die Fläche eines Dreiecks mit Basis  $2/k$  und Höhe  $k$  gehört. Damit ist auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k = 1$ .

- e) Ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine CAUCHY-Folge in  $K_1^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?

**Lösung:** Für  $\ell \geq k$  ist  $1/\ell \leq 1/k$ ; außerhalb des Intervalls  $[-1/k, 1/k]$  verschwinden also beide Funktionen. Somit ist

$$\|f_\ell - f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_\ell - f_k| = \int_{-1/k}^{1/k} |f_\ell(x) - f_k(x)| dx = 2 \int_0^{1/k} |f_\ell(x) - f_k(x)| dx,$$

da der Integrand eine gerade Funktion ist. Für  $x > 1/\ell$ , verschwindet  $f_\ell(x)$ , wir müssen also über  $f_k$  integrieren. Im Bereich  $0 \leq x \leq 1/\ell$  ist

$$f_\ell(x) - f_k(x) = (\ell - \ell^2 x) - (k - k^2 x) = (\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x = 0 \iff x = \frac{\ell - k}{\ell^2 - k^2} = \frac{1}{\ell + k};$$

daher ist

$$\begin{cases} f_k(x) > f_\ell(x) & \text{falls } x > \frac{1}{\ell + k} \\ f_\ell(x) > f_k(x) & \text{falls } x < \frac{1}{\ell + k} \end{cases}.$$

Im Intervall  $0 \leq x \leq 1/(\ell + k)$  ist also

$$|f_\ell(x) - f_k(x)| = \begin{cases} (\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{\ell + k} \\ (k - \ell) - (k^2 - \ell^2)x & \text{falls } \frac{1}{\ell + k} \leq x \leq \frac{1}{\ell} \\ k - k^2 x & \text{falls } \frac{1}{\ell} \leq x \leq \frac{1}{k} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \|f_\ell - f_k\|_1 &= 2 \int_0^{1/(\ell+k)} (f_\ell(x) - f_k(x)) dx + 2 \int_{1/(\ell+k)}^{1/\ell} (f_k(x) - f_\ell(x)) dx + 2 \int_{1/\ell}^{1/k} f_k(x) dx \\ &= 2 \int_0^{1/(\ell+k)} ((\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x) dx + 2 \int_{1/(\ell+k)}^{1/\ell} ((k - \ell) - (k^2 - \ell^2)x) dx + 2 \int_{1/\ell}^{1/k} (k - k^2 x) dx. \end{aligned}$$

Alle drei Integrale lassen sich einfach ausrechnen, am einfachsten das letzte:

$$\begin{aligned} \int_{1/\ell}^{1/k} (k - k^2 x) dx &= kx - k^2 \frac{x^2}{2} \Big|_{1/\ell}^{1/k} \\ &= k \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{\ell} \right) - \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\ell^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{k}{\ell} + \frac{k^2}{2\ell^2}. \end{aligned}$$

Für hinreichend große  $\ell$  kommt dieser Wert beliebig nahe an  $\frac{1}{2}$  heran; es kann also unmöglich ein  $N \in \mathbb{N}$  geben, so daß er für alle  $k, \ell \geq N$  kleiner ist als ein Viertel. Damit kann es erst recht kein solches  $N$  geben, so daß  $\|f_\ell - f_k\|_1 < \frac{1}{4}$ , denn alle betrachteten Teilintegrale sind größer oder gleich Null. Somit bilden die  $f_k$  keine CAUCHY-Folge.

f) Ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine CAUCHY-Folge in  $K_\infty^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?

**Lösung:** Im Punkt  $x = 0$  ist  $f_\ell(x) - f_k(x) = \ell - k$ ; daher ist  $\|f_\ell - f_k\|_\infty \geq |\ell - k|$ , was im Falle einer CAUCHY-Folge unmöglich wäre.

g) Gibt es eine Funktion  $f$ , gegen die  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise konvergiert?

**Lösung:** *Nein*, denn die Folge der  $f_k(0) = k$  divergiert.

h) Gibt es eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegen die  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fast überall (punktweise) konvergiert?

**Lösung:** *Ja*, denn für alle  $x \neq 0$  konvergiert die Folge der  $f_k(x)$  gegen Null, da  $f_k(x) = 0$  für alle  $k > 1/|x|$ . Somit konvergiert die Folge der  $f_k$  fast überall punktweise gegen die Nullfunktion.

i) Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (f_k g) = g(0)$ !

*Hinweis:* Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung!

**Lösung:** Da  $f_k$  außerhalb des Intervalls  $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$  verschwindet, ist

$$\int_{\mathbb{R}} f_k g = \int_{-1/k}^{1/k} f_k(x) g(x) dx.$$

Da  $f_k$  nirgends negativ wird, können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden; danach gibt es ein  $\xi \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ , für das gilt

$$\int_{-1/k}^{1/k} f_k(x) g(x) dx = g(\xi) \int_{-1/k}^{1/k} f_k(x) dx = g(\xi).$$

Für ein beliebig vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  gibt es wegen der Stetigkeit von  $g$  ein  $\delta > 0$ , so daß  $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x| < \delta$ . Für eine natürliche Zahl  $N \geq 1/\delta$  ist  $\frac{1}{k} < \delta$  für alle  $k \geq N$ ; für solche  $k$  ist also  $|g(\xi) - g(0)| < \varepsilon$  und damit auch

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (f_k g) - g(0) \right| < \varepsilon.$$

Dies beweist die behauptete Konvergenz.

- j) Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f_k(x) = \begin{cases} \sin x & \text{falls } |x| < k\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ . Zeigen Sie, daß die Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen die Sinusfunktion konvergiert!

**Lösung:** Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt für alle  $k > \frac{|x|}{\pi}$ , daß  $|x| < k\pi$  ist und damit  $f_k(x) = \sin x$ . Somit konvergiert die Folge der  $f_k$  punktweise gegen die Sinusfunktion.

- k) Haben die Funktionen  $f_k$  kompakten Träger?

**Lösung:** Der Träger von  $f_k$  ist das abgeschlossene Intervall  $[-k\pi, k\pi]$ , also kompakt. Außerdem ist  $f_k$  stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ : Für  $x \neq \pm k\pi$  ist das klar, weil sowohl der Sinus als auch die Nullfunktion stetig sind, und an den Übergangsstellen  $\pm k\pi$  gibt es auch keine Probleme, da der Sinus (und natürlich auch die Nullfunktion) dort verschwindet.

- l) Ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine approximierende Folge für die Sinusfunktion?

**Lösung:** Wir wissen bereits, daß die  $f_k$  Funktionen mit kompaktem Träger sind und überall, erst recht also fast überall, gegen die Sinusfunktion konvergieren. Zur approximierenden Folge fehlt noch die CAUCHY-Bedingung, d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  muß es ein  $N \in \mathbb{N}$  geben, so daß  $\|f_\ell - f_k\|_1 < \varepsilon$  für alle  $k, \ell \geq N$ . Hier ist für  $k \leq \ell$

$$\begin{aligned} \|f_\ell - f_k\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f_\ell(x) - f_k(x)| dx = \int_{-k\pi}^{k\pi} |f_\ell(x) - f_k(x)| dx \\ &= \int_{-k\pi}^{-\ell\pi} |\sin x| dx + \int_{-\ell\pi}^{\ell\pi} 0 dx + \int_{\ell\pi}^{k\pi} |\sin x| dx \\ &= 2(\ell - k) + 0 + 2(\ell - k) = 4(\ell - k). \end{aligned}$$

Offensichtlich gibt es keine Chance, daß dies für alle  $k, \ell \geq N$  unter irgendeinem  $\varepsilon > 0$  bleibt; die Folge ist also keine CAUCHY-Folge und damit auch nicht approximierend.

- m) Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$g_k(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{falls } |x| \leq k \\ e^{-k^2}(k+1-|x|) & \text{falls } k < |x| < k+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine approximierende Folge für die Funktion  $g(x) = e^{-x^2}$ ?

*Hinweis:* Auch wenn wir es erst später beweisen werden, dürfen Sie verwenden, daß  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  ist.

**Lösung:** Wie aus der Vorlesung bekannt, sind die  $g_k$  Funktionen mit kompaktem Träger, und wie bei den Funktionen  $f_k$  aus den vorigen Aufgaben folgt auch sofort, daß die Folge der  $g_k$  punktweise gegen  $g$  konvergiert. Die Folge ist daher genau dann approximierend, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist.

Da der Integrand  $e^{-x^2}$  stets positiv ist, folgt aus der Existenz des uneigentlichen Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ , daß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-k} e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{\infty} e^{-x^2} dx = 0$$

ist; daher gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$0 < \int_{-\infty}^{-k} e^{-x^2} dx = \int_k^{\infty} e^{-x^2} dx < \frac{\varepsilon}{8}$$

für alle  $k \geq N_1$ . Erst recht ist dann natürlich auch für jedes  $\ell \geq k$

$$0 < \int_{-\ell}^{-k} e^{-x^2} dx = \int_k^{\ell} e^{-x^2} dx < \frac{\varepsilon}{8},$$

denn der Integrand ist ja positiv.

Da  $e^{-x^2}$  mit wachsendem Betrag von  $x$  monoton fällt, ist  $g_k$  in den Intervallen  $[-k-1, -k]$  und  $[k, k+1]$  höchstens gleich  $e^{-k^2}$ ; da dies für  $k \rightarrow \infty >$  gegen Null geht, gibt es auch ein  $N_2 \in \mathbb{N}$ , so daß das Integral über  $g_k$  von  $-k-1$  nach  $-k$  bzw. von  $k$  nach  $k+1$  jeweils kleiner  $\varepsilon/8$  ist für  $k \geq N_2$ , den  $k+1 - |x|$  liegt im betrachteten Intervall zwischen null und eins. Für  $k, \ell \geq N = \max\{N_1, N_2\}$  und  $\ell > k$  ist daher nach der Dreiecksungleichung  $\|g_\ell - g_k\|_1 < \varepsilon$ , wenn wir das Integral aufteilen in die Teilintegrale über die neun Intervalle  $(-\infty, -\ell-1]$ ,  $[-\ell-1, -\ell]$ ,  $[-\ell, -k-1]$ ,  $[-k-1, -k]$ ,  $[-k, k]$ ,  $[k, k+1]$ ,  $[k+1, \ell]$ ,  $[\ell, \ell+1]$  und  $[\ell+1, \infty)$ : Das Integral über  $[-k, k]$  verschwindet, alle anderen sind kleiner als  $\varepsilon/8$ .

n) Zeigen Sie: Für  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ oder } x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 + y^2 \leq 2\}$  ist  $\mu^*(M) \leq 4$ .

**Lösung:**  $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  kann durch das Quadrat mit Ecken  $(\pm 1, \pm 1)$  überdeckt werden.

$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 + y^2 \leq 2\}$  ist die Vereinigung abzählbar unendlich vieler Nullmengen, denn sobald wir  $x$  festhalten, erhalten wir eine Strecke, und die ist in  $\mathbb{R}^2$  eine Nullmenge; da  $x$  rational sein muß, gibt es nur abzählbar viele Möglichkeiten für  $x$ . Daher gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Überdeckung von  $M_2$  durch Mengen  $Q_1, Q_2, \dots$ , mit  $\sum \mu(Q_i) < \varepsilon$ .

Wäre  $\mu^*(M) > 4$ , so könnten wir für  $\varepsilon = \mu^*(M) - 4$  die Überdeckung  $Q_0, Q_1, \dots$  betrachten. Die Summe aller Volumina der  $Q_i$  wäre kleiner als  $4 + \varepsilon = \mu^*(M)$ , ein Widerspruch. Also ist  $\mu^*(M) \leq 4$ .

o) Welchen Wert erwarten Sie für  $\mu^*(M)$ ?

**Lösung:** Da  $M$  bis auf Nullmengen gleich einer Kreisscheibe mit Radius eins ist, sollte  $\mu^*(M) = \pi$  sein.

p) Zeigen Sie: Für  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \sin^2 x\}$  ist  $\mu^*(M) \leq \frac{3}{4}\pi$ .

**Lösung:** Da  $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$  ist und die Sinusfunktion im Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  monoton wächst sowie im Intervall  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  monoton fällt, kann  $M$  überdeckt werden durch die drei Rechtecke

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\}, \\ Q_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ und } 0 \leq y \leq 1\} \text{ und} \\ Q_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\}. \end{aligned}$$

Daher ist  $\mu^*(M) \leq \mu(Q_1) + \mu(Q_2) + \mu(Q_3) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\pi$ .

q) Welchen Wert erwarten Sie für  $\mu^*(M)$ ?

**Lösung:**  $M$  ist die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und der Kurve  $y = \sin^2 x$  über dem Intervall  $[0, \pi]$ ; daher sollte auch  $\mu^*(M)$  gleich dieser Fläche sein, also

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx.$$

$$\sin^2 x = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right)^2 = -\frac{e^{2ix} - 1 + e^{-2ix}}{4} = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

daher ist

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos x) \, dx = \left. \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

und diesen Wert sollte auch  $\mu^*(M)$  haben.