WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6.–8. Mai 2015

a) Welche der folgenden Mengen ist eine Nullmenge?
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

b) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Abbildungen auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in D$, ist $f = g$.

c) Zeigen Sie, daß durch $f_k(x) = \max\{0, k - k^2\,|x|\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion aus $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert wird!

d) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f_k$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k$!

e) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $K_1^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

f) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $K_\infty^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

g) Gibt es eine Funktion f, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert?

h) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall (punktweise) konvergiert?

i) Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (f_k g) = g(0)$!
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung!

j) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $f_k(x) = \begin{cases} \sin x & \text{falls } |x| < k\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Sinusfunktion konvergiert!

k) Haben die Funktionen f_k kompakten Träger?

l) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für die Sinusfunktion?

m) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als
$$g_k(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{falls } |x| \le k \\ e^{-k^2}(k + 1 - |x|) & \text{falls } k < |x| < k + 1 \\ 0 & \text{sont} \end{cases}.$$
Ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$?
Hinweis: Auch wenn wir es erst später beweisen werden, dürfen Sie verwenden, daß $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ ist.

n) Zeigen Sie: Für $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \text{ oder } x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 + y^2 \le 2\}$ ist $\mu^*(M) \le 4$.

o) Welchen Wert erwarten Sie für $\mu^*(M)$?

p) Zeigen Sie: Für $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi \text{ und } 0 \le y \le \sin^2 x\}$ ist $\mu^*(M) \le \frac{3}{4}\pi$.

q) Welchen Wert erwarten Sie für $\mu^*(M)$?