Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29.+30. April 2015

a) Q sei das achsenparallele Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(\pi,4)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils für beide möglichen Anordnungen der Variablen x und y:

$$\int_Q xy, \qquad \int_Q y\sin 2x, \qquad \int_Q xye^{2x}, \qquad \int_Q (2-3y\sin xy)\,!$$

Lösung:

$$\int_Q xy = \int_0^4 \left(\int_0^\pi xy\,dx\right) dy = \int_0^4 \left(\frac{\pi^2}{2}y - \frac{0^2}{2}y\right) dy = \frac{\pi^2}{2}\frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 = 4\pi^2 \qquad \textit{bzw.}$$

$$\int_Q xy = \int_0^\pi \left(\int_0^4 xy\,dy\right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{4^2}{2}x - \frac{0^2}{2}x\right) dx = 8\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^\pi = 4\pi^2$$

$$\int_Q y\sin 2x = \int_0^4 \left(\int_0^\pi y\sin 2x\,dx\right) dy = \int_0^4 y\left(\frac{-\cos 2\pi}{2} - \frac{-\cos 0}{2}\right) dy = \int_0^4 0\,dy = 0 \qquad \textit{bzw.}$$

$$\int_Q y\sin 2x = \int_0^\pi \left(\int_0^4 y\sin 2x\,dy\right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{4^2}{2}\cdot\sin 2x\right) dx = 8\cdot\frac{-\cos 2x}{2}\bigg|_0^\pi$$

$$= -4\cos 2\pi + 4\cos 0 = 0$$

$$\int_Q xye^2x = \int_0^4 \left(\int_0^\pi xye^{2x}\,dx\right) dy = \int_0^4 y\cdot\left(\int_0^\pi xe^{2x}\,dx\right) dy$$

Vom Integral in der Klammer kennen wir keine Stammfunktion; um es zu berechnen, verwenden wir die Regel zur *partiellen Integration*

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx \qquad u' = e^{2x},\ \ u = \frac{e^{2x}}{2},\quad v = x,\quad v' = 1$$

und erhalten

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\,.$$

Somit ist $\displaystyle\int_0^\pi xe^{2x}\,dx = \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} - \frac{-1}{4} = \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} + \frac{1}{4}$ und

$$\int_Q xye^{2x} = \int_0^4 y\left(\frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} + \frac{1}{4}\right) dy = (4\pi-2)e^{2\pi} + 2\,.$$

Bei der anderen Integrationsreihenfolge rechnen wir

$$\int_Q xye^2x = \int_0^\pi \left(\int_0^4 xye^{2x}\,dy\right) dx = \int_0^\pi \frac{4^2}{2}xe^{2x}\,dx = 8\int_0^\pi xe^{2x}\,dx = (4\pi-2)e^{2\pi} + 2\,.$$

Beim letzten Integral schließlich haben wir

$$\int_Q (2-3y\sin xy) = \int_0^4 \left(\int_0^\pi (2-3y\sin xy)\,dx\right) dy\,.$$

Die partielle Ableitung von $\cos xy$ nach x ist $-y \sin xy$; die Stammfunktion unseres Integranden bezüglich der Variablen x ist also $2x + 3\cos xy$. Somit ist

$$\int_Q (2 - 3y \sin xy) = \int_0^4 (2\pi + 3\cos \pi y - 3)\, dy = (2\pi - 3)y + \frac{3 \sin \pi y}{\pi}\bigg|_0^4 = 8\pi - 12\,.$$

Bei der anderen Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$\int_Q (2 - 3y \sin xy) = \int_0^\pi \left(\int_0^4 (2 - 3y \sin xy)\, dy \right) dx\,.$$

Eine Stammfunktion von $y \sin xy$ bezüglich y müssen wir mit partieller Integration suchen; wir setzen $u' = \sin xy$ und $v = y$, also $u = -\dfrac{\cos xy}{x}$ und $v' = 1$. Somit ist

$$\int y \sin xy\, dy = -\frac{y}{x} \cos xy + \int \frac{\cos xy}{x}\, dy = -\frac{y}{x} \cos xy + \frac{\sin xy}{x^2}$$

und damit

$$\int_0^4 (2 - 3y \sin xy)\, dy = 2y + \frac{3y}{x} \cos xy - \frac{3 \sin xy}{x^2}\bigg|_0^4 = 8 + \frac{12 \cos 4x}{x} - \frac{3 \sin 4x}{x^2}\,.$$

Leider hat weder der zweite noch der dritte Summand eine elementar ausdrückbare Stammfunktion; daß die Ableitung von $3\sin(4x)/x$ gerade die Summe dieser beiden Summanden ist, errät man höchstens mit viel Glück. Zumindest bei diesem letzten Beispiel hängt der Erfolg also wesentlich von der Integrationsreihenfolge ab. Das Ergebnis ist allerdings dasselbe, auch wenn wir nun ein uneigentliches Integral auswerten müssen:

$$\int_0^\pi \left(8 + \frac{12 \cos 4x}{x} - \frac{3 \sin 4x}{x^2} \right) dx = 8x + \frac{3 \sin 4x}{x}\bigg|_0^\pi = 8\pi - 12\,,$$

denn nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{12 \cos 4x}{1} = 12\,.$$

b) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - |x|$!

Lösung: Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$, so daß $f(x)$ verschwindet; für $x < 0$ ist $f(x) = 2x \neq 0$. Der Träger von f ist somit der Abschluß der Menge aller negativer reeller Zahlen, also $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

c) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - [x]$!

Lösung: $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x; somit verschwindet $f(x)$ genau dann, wenn x eine ganze Zahl ist; ansonsten ist $f(x) \neq 0$. Der Abschluß von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und damit der Träger von f ist daher $\mathbb{R}$, denn in jeder Umgebung einer ganzen Zahl gibt es Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, so daß sie als Randpunkt von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zum Abschluß gehört.

d) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = \sin x$!

Lösung: $\sin x$ verschwindet nur in den ganzzahligen Vielfachen von π, ist also auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ von Null verschieden. Der Abschluß dieser Menge ist ganz $\mathbb{R}$, den da es in jeder Umgebung von $k\pi$ Punkte gibt, die keine ganzzahligen Vielfachen von π sind, ist $k\pi$ ein Randpunkt von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$, gehört also zum Abschluß.

e) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = \sin x - |\sin x|$!

Lösung: $f(x)$ ist genau dann von Null verschieden, wenn $\sin x < 0$ ist, wenn es also eine ganze Zahl k gibt, so daß $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ ist. Der Träger von f ist daher die Vereinigung der *abgeschlossenen* Intervalle $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ über alle $k \in \mathbb{Z}$.

f) Welche der Funktionen aus den vorigen vier Aufgaben hat kompakten Träger?

Lösung: *Keine,* denn alle Träger sind unbeschränkt.

g) Richtig oder falsch: Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch die Funktion $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Lösung: *Richtig:* $h(x)$ ist natürlich stetig und verschwindet genau dann, wenn sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ verschwinden. Ist also $h(x) \neq 0$, so muß auch mindestens eine der beiden Funktionen f und g in x einen von Null verschiedenen Wert haben. Damit liegt x in mindestens einem der beiden Träger, also auch in deren Vereinigung. Diese ist als Vereinigung zweier kompakter Mengen selbst kompakt, also liegt $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \neq 0\}$ in einer kompakten Menge. Diese ist insbesondere abgeschlossen und enthält daher auch den Abschluß von W, den Träger von h. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist dieser selbst kompakt.

h) Richtig oder falsch: Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt der Träger von h in der Vereinigung der Träger von f und von g.

Lösung: *Richtig;* das folgt aus der Argumentation bei der vorigen Aufgabe.

i) Richtig oder falsch: Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist der Träger von h die Vereinigung der Träger von f und von g.

Lösung: $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \neq 0\}$ ist die Vereinigung der Mengen $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ und $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}$; die Träger von h, f, g sind die Abschlüsse dieser Mengen. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, daß der Abschluß von $W = U \cup V$ gleich der Vereinigung der Abschlüsse von U und V ist. Da diese Vereinigung abgeschlossen ist, enthält sie den Abschluß von W. Um die Gleichheit nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß sie jeder Randpunkt von U oder V im Abschluß von W liegt. Sei also x ein Randpunkt von U. Dann gibt es eine offene Umgebung O von x, die sowohl Punkte aus U als auch Punkte aus dem Komplement von U enthält. Falls letztere alle in V liegen, ist insbesondere $x \in V$, also erst recht $x \in W$. Andernfalls ist x ein Randpunkt von W, liegt also im Abschluß von W. Da wir für Randpunkte von V ganz entsprechend argumentieren können, folgt die Behauptung.

j) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Berechnen Sie $\int_Q f$ für das Quadrat Q mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!

Lösung: Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\int_Q f &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (1 - x^2 - y^2)\,dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \Big|_{-1}^{1} dy = \int_{-1}^{1} \left(\left(1 - \frac{1}{3} - y^2\right) - \left(-1 + \frac{1}{3} + y^2\right) \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3} - 2y^2 \right) dy = \frac{4y}{3} - \frac{2y^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

k) Berechnen Sie auch $\int_Q g$ für $g(x,y) = \max\{0, f(x,y)\}$, und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch!

Lösung: Wenn wir y festhalten, ist $f(x,y) = 1-x^2-y^2 > 0$ genau dann, wenn $x^2+y^2 < 1$ ist, wenn also (x,y) in der offenen Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt liegt. Wir können dies auch ausdrücken durch die Ungleichung

$$-\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}\,.$$

Für diese Punkte (x,y) ist $g(x,y) = f(x,y) > 0$, ansonsten ist $g(x,y) = 0$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_Q g &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (1-x^2-y^2)\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(x-\frac{x^3}{3}-xy^2\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{1-y^2}-\frac{2}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2}-2y^2\sqrt{1-y^2}\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-y^2}-\frac{4}{3}y^2\sqrt{1-y^2}\right)dy = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy-\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}y^2\sqrt{1-y^2}\,dy\,.
\end{aligned}$$

Für die beiden letzten Integrale kennen wir keine Stammfunktionen der Integranden, müssen also versuchen, die Integrale mit einer der uns bekannten Integrationsregeln umzuformen.

Wegen der Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ bietet sich zumindest beim ersten Integral die Substitution $y = \sin t$ an. Da y von -1 nach 1 läuft, muß dabei t von $-\frac{\pi}{2}$ nach $\frac{\pi}{2}$ laufen. Dann ist

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t\,,$$

denn im betrachteten Intervall nimmt der Kosinus keine negativen Werte an. Weiter ist $dy = \cos t\,dt$, also

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt\,.$$

Auf letzteres Integral können wir die Regel zur partiellen Integration anwenden: In

$$\int u'v\,dt = uv - \int uv'\,dt$$

setzen wir $u = \sin t$ und $v = \cos t$; dann ist $u' = \cos t$ und $v' = -\sin t$, also

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 t\,dt &= \sin t\cos t + \int \sin^2 t\,dt = \sin t\cos t + \int (1-\cos^2 t)\,dt \\
&= \sin t\cos t + \int dt - \int \cos^2 t\,dt = \sin t\cos t + t - \int \cos^2 t\,dt\,,
\end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante der Einfachheit halber weggelassen wurde. Bringen wir das Integral rechts auf die linke Seite, erhalten wir das Ergebnis

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin t\cos t}{2} + C$$

und damit

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin t\cos t}{2}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},$$

denn der Kosinus verschwindet an beiden Grenzen.

Für das zweite Integral liefert die Substitution $y = \sin t$ entsprechend, daß

$$\int y^2\sqrt{1-y^2}\,dy = \int \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

ist; auch hier könnten wir mit partieller Integration weitermachen, jedoch geht es wohl schneller, wenn wir den Integranden nach den EULERschen Formeln umformen:

$$\sin^2 t\cos^2 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = -\frac{(e^{2it}-e^{-2it})^2}{16} = -\frac{e^{4it}+e^{-4it}-2}{16}$$
$$= \frac{1-\cos 4t}{8}.$$

Somit ist

$$\int_{-1}^{1} y^2\sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$

denn der Sinus verschwindet bei $\pm 2\pi$.

Jetzt müssen wir nur noch alles zusammensetzen und erhalten

$$\int_Q g = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Geometrische Interpretation: Der Punkt (x, y) hat den Abstand $r = \sqrt{x^2+y^2}$ vom Nullpunkt, und $f(x, y) = 1 - r^2$ hängt nur ab von diesem Abstand. Dasselbe gibt auch für $g(x, y) = \max(0, 1 - r^2)$. Der Graph von g entsteht also durch Rotation der Parabel $z = 1 - x^2$ aus der (x, z)-Ebene im Bereich $-1 \le x \le 1$ um die z-Achse; er sieht ungefähr aus wie ein Zuckerhut. Das Integral gibt sein Volumen an.

l) Existiert $\int_{\mathbb{R}^n} g$?

Lösung: Wie wir bei der vorigen Aufgabe gesehen haben, verschwindet g außerhalb der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$. Träger von g ist somit die kompakte abgeschlossene Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 1$, d.h. g hat kompakten Träger, und damit existiert das Integral. Da der Träger ganz im Quadrat Q aus der vorigen Aufgabe liegt, hat es denselben Wert wie das dortige Integral über Q.

m) Stellen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2}\,dt$ als Integral dar!

Lösung: Da wir über das Intervall $[1, 2]$ integrieren, ist der Nenner des Integranden überall mindestens gleich eins; der Integrand ist also stetig und er ist auch partiell differenzierbar nach x: Nach der Quotientenregel ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2} = \frac{-(x^2+t^2)\cdot\sin(x+t) - 2x\cdot\cos(x+t)}{(x^2+t^2)^2}.$$

Somit ist nach dem Lemma aus der Vorlesung die Integration über t vertauschbar mit der Ableitung nach x, d.h.

$$f'(x) = -\int_1^2 \frac{(x^2+t^2)\cdot\sin(x+t) + 2x\cdot\cos(x+t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt.$$

n) Zeigen Sie, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig darstellen läßt in der Form $\frac{1}{2}m(m+1)+\ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq \ell \leq m+1$, und folgern Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(k,\ell) = \frac{1}{2}(k+\ell-2)(k+\ell-1)+\ell$ bijektiv ist!

Lösung: $S_m = \frac{1}{2}m(m+1)$ ist die Summe der ersten m natürlichen Zahlen. Damit ist klar, daß die Folge der S_m streng monoton wächst; es gibt also zu jeder natürlichen Zahl n genau ein $m \in \mathbb{N}_0$, so daß $S_m < n \leq S_{m+1}$ ist. Ebenfalls wegen der Summeninterpretation ist $S_{m+1} - S_m = m+1$; schreiben wir also $n = S_m + \ell$, muß $1 \leq \ell \leq m+1$ sein.

Diese Darstellung ist eindeutig, denn ist $n = S_m + \ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq \ell \leq m+1$, so ist $S_m < n \leq S_m + (m+1) = S_{m+1}$, womit m und damit natürlich auch ℓ eindeutig bestimmt wäre.

Betrachten wir nun die Abbildung φ. Zunächst ist $\varphi(k,\ell)$ für alle $k,\ell \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, denn $k+\ell-2 \geq 0$, so daß der erste Summand in $\mathbb{N}_0$ liegt, die Summe also wegen $\ell \geq 1$ in $\mathbb{N}$.

Die Bijektivität läßt sich am einfachsten nachweisen, indem wir eine Umkehrabbildung $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ konstruieren: Wir schreiben eine vorgegebene natürliche Zahl n als $S_m + \ell$ mit $1 \leq \ell \leq m+1$ und setzen $k = m+2-\ell$. Dann ist $k \in \mathbb{N}$ und

$$S_m + \ell = \frac{m(m+1)}{2} + \ell = \frac{k+\ell-2)(k+\ell-1)}{2} + \ell = \varphi(k,\ell)\,;$$

wir setzen also $\psi(n) = (k,\ell)$: Wie wir gerade gesehen haben, ist $\varphi \circ \psi$ die Identität auf $\mathbb{N}$; starten wir umgekehrt mit $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so ist $\varphi(k,\ell) = S_{k+l-2} + \ell$ und $1 \leq \ell \leq k+\ell-1$, also $\psi\big(\varphi(n)\big) = (k,\ell)$.

o) Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung φ, daß für zwei abzählbar unendliche Mengen A und B auch die Menge $A \times B$ abzählbar unendlich ist!

Lösung: Wegen der Abzählbarkeit von A und B gibt es bijektive Abbildungen $\omega_1\colon \mathbb{N} \to A$ und $\omega_2\colon \mathbb{N} \to B$. Dann ist auch die Abbildung

$$\Omega\colon \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B \\ \quad (k,\ell) \mapsto \big(\omega_1(k), \omega_2(\ell)\big) \end{cases}$$

bijektiv, und mit der Bijektion $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aus der vorigen Aufgabe ist $\Omega \circ \psi\colon \mathbb{N} \to A \times A$ die gewünschte Bijektion $\mathbb{N} \to A \times B$.

p) Folgern Sie, daß für eine abzählbar unendliche Menge A und eine natürliche Zahl n auch A^n abzählbar unendlich ist!

Lösung: Wir beweisen die Abzählbarkeit von A^n durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist $A^1 = A$ natürlich abzählbar. Falls wir für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits wissen, daß A^n abzählbar ist, schreiben wir $A^{n+1} = A \times A^n$ und können die vorige Aufgabe auf $B = A^n$ anwenden.

q) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Nullmengen?

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \qquad B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \qquad C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x+y \in \mathbb{Q}\big\},$$
$$D_a = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |xy| < a\big\} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

Lösung: $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist als Produkt zweier abzählbarer Mengen selbst abzählbar, also Nullmenge. $B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ist zwar nicht abzählbar, aber trotzdem Nullmenge, denn für jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R} \times \{x\} = \big\{(y,x) \bigm| y \in \mathbb{R}\}$ eine Nullmenge, und die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Aus demselben Grund ist auch C eine Nullmenge, denn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist

$$C_q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x+y = q\big\} = \big\{(x, q-x) \bigm| x \in \mathbb{R}\big\}$$

eine Nullmenge, und C ist die Vereinigung der abzählbar vielen C_q.

D_a ist für kein $a > 0$ eine Nullmenge, denn das offene Quadrat mit Ecken $(\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{a})$ liegt ganz in D_a. Da jede Überdeckung von D_a durch Rechtecke insbesondere dieses Quadrat überdecken muß, ist die Summe der Volumina der Überdeckungsquader daher mindestens gleich $4a$ und damit unmöglich kleiner als ein $\varepsilon < 4a$. Für $a < 0$ ist $D = \emptyset$ natürlich eine Nullmenge; für $a = 0$ besteht D_a aus den beiden Koordinatenachsen, also zwei Nullmengen, und auch deren Vereinigung ist eine Nullmenge.

r) *Richtig oder falsch:* Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Nullmengen, so ist auch $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.

Lösung: *Richtig:* Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da A und B Nullmengen sind, gibt es abzählbare Quaderüberdeckungen von A und B mit Gesamtvolumen jeweils kleiner als $\sqrt{\varepsilon}$. Nehmen wir nun alle Quader der Form $Q_i \times Q_j$, wobei Q_i einer der Quader aus der Überdeckung von A ist und Q_j entsprechend von B, so ist die Menge aller dieser Quader abzählbar und sie überdecken $A \times B$. Für festes i ist das Volumen der sämtlichen Quader $Q_i \times Q_j$ das Volumen von Q_i mal der Summe der Volumina derQ_j, also kleiner als $\mu(Q_i)\sqrt{\varepsilon}$. Summieren wir nun noch über alle i, erhalten wir eine Summe kleiner $\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

s) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Abbildungen auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in D$, ist $f = g$.

Lösung: Wir betrachten die Menge A aller $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$. Nach Voraussetzung ist dies eine Nullmenge; falls sie leer ist, sind wir fertig. Andernfalls sei x_0 ein Punkt aus$A$. Da eine Nullmenge keine inneren Punkte hat, liegen in jeder Umgebung von x_0 Punkte, die nicht aus A sind. Wir wählen jeweils einen solchen Punkt x_k aus der Kugel mit Radius $1/k$ um x_0. Dann ist $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und da die Folge der x_k gegen x_0 konvergiert, ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f und g

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x_0)\,,$$

im Widerspruch zur Annahme $x_0 \in A$. Also ist $A = \emptyset$ und $f = g$.