

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29.+30. April 2015

- a) Q sei das achsenparallele Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(\pi,4)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils für beide möglichen Anordnungen der Variablen x und y :

$$\int_Q xy, \quad \int_Q y \sin 2x, \quad \int_Q xy e^{2x}, \quad \int_Q (2 - 3y \sin xy) !$$

- b) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - |x|$!
c) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - [x]$!
d) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = \sin x$!
e) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = \sin x - |\sin x|$!
f) Welche der Funktionen aus den vorigen vier Aufgaben hat kompakten Träger?
g) *Richtig oder falsch*: Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch die Funktion $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
h) *Richtig oder falsch*: Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt der Träger von h in der Vereinigung der Träger von f und von g .
i) *Richtig oder falsch*: Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist der Träger von h die Vereinigung der Träger von f und von g .
j) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Berechnen Sie $\int_Q f$ für das Quadrat Q mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!
k) Berechnen Sie auch $\int_Q g$ für $g(x, y) = \max\{0, f(x, y)\}$, und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch!
l) Existiert $\int_{\mathbb{R}^n} g$?

- m) Stellen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \int_1^2 \frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2} dt$ als Integral dar!

- n) Zeigen Sie, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig darstellen läßt in der Form $\frac{1}{2}m(m+1) + \ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq \ell \leq m+1$, und folgern Sie, daß die Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\varphi(k, \ell) = \frac{1}{2}(k+\ell-2)(k+\ell-1) + \ell$ bijektiv ist!
o) Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung φ , daß für zwei abzählbar unendliche Mengen A und B auch die Menge $A \times B$ abzählbar unendlich ist!
p) Folgern Sie, daß für eine abzählbar unendliche Menge A und eine natürliche Zahl n auch A^n abzählbar unendlich ist!
q) Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind Nullmengen?

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}, \\ D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < a\} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

- r) *Richtig oder falsch*: Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Nullmengen, so ist auch $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.
s) $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei stetige Abbildungen auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in D$, ist $f = g$.

Wegen des Feiertags am 1. Mai sollten die Teilnehmer der Freitagsguppe diese Woche ein anderes Tutorium besuchen.