Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22–24. April 2015

a) $f: D \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, und für ein (nicht notwendigerweise endliches) abgeschlossenes Intervall $I \subseteq D$ sei $f(I) \subseteq I$. Außerdem gebe es eine reelle Zahl $M < 1$, so daß $|f'(x)| \leq M$ ist für alle $x \in I$. Zeigen Sie, daß es dann genau ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$!

Lösung: Zu je zwei Punkten $x \neq y$ aus I gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein ξ zwischen x und y, so daß
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$$
ist. Da I ein Intervall ist, liegt mit x und y auch ξ in I, also ist $|f'(\xi)| \leq M < 1$. Somit ist
$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq M, \quad \text{also} \quad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y| \;.$$
Da $M < 1$ ist, erfüllt f auf I die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, aus dem die Behauptung folgt.

b) Was liefert Ihnen die vorige Aufgabe für die Konvergenz des Verfahrens von Heron?

Lösung: Die Abbildung, um die es hier geht, ist natürlich
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \;,$$
wobei $a > 0$ die reelle Zahl ist, deren Wurzel wir berechnen wollen. $f(x)$ ist offensichtlich nicht definiert für $x = 0$. Um zu zeigen, daß sie die Kontraktionseigenschaft aus dem Banachschen Fixpunktsatz erfüllt, können wir, wie wir oben gesehen haben, die Ableitung
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$
betrachten; sie ist offensichtlich nicht nach unten beschränkt für $x \to 0$. Da a und x^2 positiv sind, ist sie aber nach oben beschränkt durch $\frac{1}{2}$. Der Betrag ist daher genau dann kleiner als eins, wenn $f'(x) > -1$ ist, also
$$\frac{a}{x^2} < 3 \quad \text{oder} \quad x^2 > \frac{a}{3} \,.$$
Da wir eine abgeschlossene Menge brauchen und eine *Schranke,* die echt kleiner als eins ist, müssen wir also ein $b > \sqrt{a/3}$ wählen und uns auf die Menge aller reeller Zahlen größer oder gleich x beschränken. Dabei muß b natürlich so sein, daß $f(x)$ für alle $x \geq b$ wieder größer oder gleich b ist. Eine naheliegende Möglichkeit ist etwa $b = \sqrt{a/2}$. Mit der Schranke gibt es keine Probleme; wir müssen nur sehen, daß für $x \geq \sqrt{b/2}$ auch $f(x) \geq \sqrt{b/2}$ ist. Das ist aber klar, die wie wir im letzten Semester gesehen haben, ist beim Heron-Verfahren $f(x) > \sqrt{a}$ für alle positiven $x < \sqrt{a}$.

c) V sei ein vollständiger normierter Vektorraum, und die Abbildung $f: V \to V$ erfülle für alle $x, y \in V$ und ein festes $q \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \leq q\,\|x - y\|$. Weiter sei x^* ein Fixpunkt von f, $x_0 \in V$ ein beliebiger Punkt, und für $k \in \mathbb{N}$ sei x_k rekursiv definiert durch $x_k = f(x_{k-1})$. Zeigen Sie:
$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{q^k}{1 - q}\,\|x_1 - x_0\| \;.$$

Lösung: Nach dem BANACHschen Fixpunktsatz konvergiert die Folge der x_k gegen x^*. Für jeden Index j ist wegen Kontraktionseigenschaft

$$\|x_{j+1} - x_j\| \leq q\,\|x_j - x_{j-1}\| \leq q^2\,\|x_{j-1} - x_{j-2}\| \leq \cdots \leq q^j\,\|x_1 - x_0\|\ ;$$

daher ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ nach der Dreiecksungleichung und der Summenformel für geometrische Reihen

$$\begin{aligned}\|x_m - x_k\| &= \left\|\sum_{j=k}^{m-1}(x_{j+1} - x_j)\right\| \leq \sum_{j=k}^{m-1}\|x_{j+1} - x_j\| \leq \sum_{j=k}^{m-1} q^j\,\|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{q^k - q^m}{1-q}\,\|x_1 - x_0\| \leq \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\|\ .\end{aligned}$$

Da die Folge der x_m gegen x^* konvergiert, konvergiert die Folge $(x_m - x_k)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $x^* - x_k$; wegen der Stetigkeit der Norm konvergiert dann auch die Folge der Normen $\|x_m - x_k\|$ gegen $\|x^* - x_k\|$. Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist jedes einzelne Folgenglied kleiner oder gleich $q^k/(1-q)$, also auch der Grenzwert.

d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = \cos x$ genau einen Fixpunkt $x \in \mathbb{R}$ hat!

Lösung: Ist $x = \cos x$, so muß $|x| = |\cos x| \leq 1$ sein. Auf dem Intervall $[-1, 1]$ ist die Funktion f kontrahierend, denn dort ist $|f'(x)| = |\sin x| \leq sin 1 < 1$. Also gibt es dort nach dem BANACHschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt, da es keinen mit $|x| > 1$ geben kann, ist es der einzige auf ganz $\mathbb{R}$.

e) Zeigen Sie, daß für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Folge mit $x_i = \cos x_{i-1}$ gegen diesen Fixpunkt konvergiert!

Lösung: $x_1 = \cos x_0$ liegt im Intervall $[-1, 1]$, so daß die Folge mit Startwert x_1 nach dem Beweis des BANACHschen Fixpunktsatzes gegen den Fixpunkt konvergiert, also auch die mit Startwert x_0.

f) Zeigen Sie, daß $0 \leq \sin x < x$ für alle positiven reellen Zahlen x!

Lösung: Betrachte die Funktion $f(x) = \sin x - x$. Für $x = 0$ ist $f(x) = 0$, und für $x \in (0, 2\pi]$ ist $f'(x) = \cos x - 1$ negativ, da $\cos x < 1$ ist. Somit ist f im Intervall $(0, 2\pi)$ streng monoton fallend, also wegen $f(0) = 0$ negativ. Somit gibt es dort keinen Punkt x mit $\sin x = x$. Für $x \geq 2\pi$ kann ohnehin nicht $x = \sin x$ gelten, da $\sin x \leq 1$.

g) Zeigen Sie, daß $f(x) = \sin x$ nicht kontrahierend ist auf dem Intervall $[-1, 1]$!

Lösung: Angenommen, f wäre kontrahierend. Dann gäbe es also ein $q < 1$, so daß $|\sin y - \sin x| \leq q\,|y - x|$ wäre. Da der Kosinus zwischen null und eins monoton fällt, gibt es jedem solchen q ein $x_0 \in (0, 1]$, so daß $\cos x > q$ für alle $x \in [0, x_0]$. Für zwei Punkte $x \neq y$ aus $[0, x_0]$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in [0, x_0]$, so daß

$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos \xi > q\ , \quad \text{also} \quad |\sin y - \sin x| > q\,|y - x|$$

ist, im Widerspruch zur Annahme. Also ist f nicht kontrahierend.

h) Zeigen Sie, daß trotzdem für jedes x_0 in $\mathbb{R}$ die Folge mit $x_i = \sin x_{i-1}$ konvergiert, und bestimmen Sie die möglichen Grenzwerte!

Lösung: $x_1 = \sin x_0$ liegt natürlich im Intervall $[-1, 1]$, aber da der Sinus dort nicht kontrahierend ist, können wir den BANACHschen Fixpunktsatz nicht anwenden. Da $1 < \frac{\pi}{2}$, ist aber der Sinus monoton wachsend im Intervall $[-1, 1]$, und da $0 \leq \sin x < x$, ist für ein positives x_1 die Folge der $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt durch die Null. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS konvergiert die Folge daher gegen ein $x^* \geq 0$. Wäre $x^* > 0$, so wäre $\sin x^* < x^*$, und wegen der Stetigkeit der Sinusfunktion würde die Folge der $\sin x_i$ gegen $\sin x^*$ konvergieren. Da $\sin x_i = x_{i+1}$ ist, hat diese Folge aber auch Grenzwert x^*, ein Widerspruch. Also konvergiert die Folge im Falle eines positiven x_1 gegen null. Für $x_1 = 0$ sind natürlich auch alle folgenden $x_i = 0$, so daß auch hier der Grenzwert null ist, und für $x_1 < 0$ können wir einfach die Folge der $-x_i$ für $i \geq 1$ betrachten. Da $\sin(-x_i) = -\sin x_i$ ist diese Folge gerade spiegelbildlich zu der mit erstem Glied $-x_1$, konvergiert also auch gegen null.

i) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ keinen Fixpunkt hat, daß aber trotzdem gilt: $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ für alle $x \neq y$ aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$! Warum widerspricht dies nicht dem BANACHschen Fixpunktsatz?

Lösung: Für einen Fixpunkt x von f wäre

$$x = f(x) = x + \frac{1}{1+x}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{1+x} = 0\,.$$

Das ist offensichtlich nicht möglich. Trotzdem ist für alle $x \neq y$ aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| y - x + \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+x} \right| = \left| y - x + \frac{(1+x)-(1+y)}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= |y - x| \left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)}\right) < |y - x|\ . \end{aligned}$$

Dies widerspricht nicht dem BANACHschen Fixpunktsatz, denn da x und y beliebig groß werden können, kommt der Ausdruck in der Klammer der Eins beliebig nahe; es gibt also kein $q < 1$, so daß $|f(y) - f(x)| \leq q\,|y - x|$ wäre. So ein q gibt es nur, wenn wir uns auf ein nach oben beschränktes Intervall beschränken; da $f(x) > x$ für alle $x \geq 0$ wird ein solches Intervall aber von f nicht auf sich selbst abgebildet.

j) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[-10, 10]$ gleichmäßig gegen e^x.

Lösung: Nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung ist

$$e^x = f_n(x) + R_{n+1}(\xi) \quad \text{mit} \quad R_{n+1}(\xi) = \frac{\xi^{n+1} e^{\xi}}{(n+1)!}$$

für ein ξ zwischen Null und x. Für $x \in [-10, 10]$ liegt insbesondere auch ξ in diesem Intervall; also ist wegen der Monotonie der Exponentialfunktion

$$|e^x - f_n(x)| = |R_{n+1}(\xi)| \leq \frac{10^{n+1} e^{10}}{(n+1)!}\,.$$

Die rechte Seite ist unabhängig von x und definiert für $n \to \infty$ eine Nullfolge, denn für $n \geq 20$ ist

$$\frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^{20}}{20!} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{10}{22} \cdots \frac{10}{n+1} \leq \frac{10^{20}}{20!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-19}\,.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|e^x - f_n(x)| = |R_{n+1}(\xi)| \leq \frac{10^{n+1} e^{10}}{(n+1)!} < \varepsilon$$

ist für alle $x \in [-10, 10]$ und alle $n \geq N$. Dies zeigt die gleichmäßige Konvergenz.

k) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = e^{-x^2} - x$ genau eine Nullstelle hat, und geben Sie eine Folge an, die gegen diese Nullstelle konvergiert!

Lösung: Wir betrachten die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$ und wenden darauf den Satz aus der vorletzten Aufgabe an: $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ geht für $x \to \pm\infty$ gegen Null, denn e^{x^2} wächst schneller als jedes Polynom. Um die lokalen Extrema von g zu bestimmen, leiten wir noch einmal ab:

$$g''(x) = -2e^{-x^2} + (2x)^2 e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

verschwindet für $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ und

$$g'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mp\sqrt{2}e^{-1/2} = \mp\sqrt{\frac{2}{e}}\,.$$

Somit ist $|g'(x)| \le M = \sqrt{2/e} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, Nach der vorletzten Aufgabe erfüllt g somit die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes; es gibt also genau einen Fixpunkt, d.h. genau eine Nullstelle von f, und diese ist z.B. der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = e^{-x_n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

l) *Richtig oder falsch:* V sei ein BANACH-Raum, und die Abbildung $f\colon V \to V$ erfülle die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes. Dann ist f gleichmäßig stetig auf V.

Lösung: Es gibt also eine reelle Zahl $q \in [0, 1)$, so daß $\|f(y) - f(x)\| \le q\,\|y - x\|$ ist für alle $x, y \in V$. Falls $q = 0$ ist, ist f konstant, also gleichmäßig stetig. Andernfalls sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\delta = \varepsilon/q$. Für zwei Punkte $x, y \in V$ mit $\|y - x\| < \delta$ ist dann

$$\|f(y) - f(x)\| \le q\,\|y - x\| < q\delta = q\frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von f.

m) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion?

Lösung: *Nein;* $f_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n; daher ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \pm\infty$, je nach Parität von n. Da $|e^x| \le 1$ für alle $x \le 0$, wächst $|e^x - f_n(x)|$ daher unbegrenzt für $x \to -\infty$.

n) Berechnen Sie für $f_0(x) \equiv 1$ die ersten Glieder der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f_{n-1}(t) - 2\big)\,dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und erraten Sie den Grenzwert!

Lösung:

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_0(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x (-2t)\,dt = 1 - x^2$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_1(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(-1 - t^2)\,dt = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2}$$

$$f_3(x) = 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_2(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(-1 - t^2 - \tfrac{1}{2}t^4)\,dt = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\,.$$

Dies sieht nach Fakultäten im Nenner aus, allerdings sind die Exponenten doppelt so groß wie bei der Exponentialfunktion und auch die Vorzeichen sind, abgesehen vom ersten, minus statt plus. Also müssen wir e^{x^2} betrachten und dies geeignet modifizieren:

$$-e^{x^2} = -1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \cdots \quad\Longrightarrow\quad 2 - e^{x^2} = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \cdots\,.$$

Wir vermuten daher den Grenzwert $f(x) = 2 - e^{x^2}$.

o) Zeigen Sie, daß die erratene Funktion die Gleichungen

$$f(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f(t) - 2\big)\,dt \quad \text{und} \quad f'(x) = 2x\big(f(x) - 2\big)$$

erfüllt!

Lösung:

$$1 + \int_0^x 2t\big(f(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(2 - e^{t^2} - 2)\,dt = 1 - \int_0^x 2te^{t^2}\,dt\,.$$

Die Ableitung von e^{x^2} ist $2xe^{x^2}$, also ist dies gleich

$$1 - e^{x^2} + 1 = 2 - e^{x^2}\,.$$

Die Aussage über die Ableitung rechnet man sofort nach, denn

$$f'(x) = -2xe^{x^2} \quad \text{und} \quad 2x\big(f(x) - 2\big) = 2x(-e^{x^2})\,.$$