WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22–24. April 2015

a) $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, und für ein (nicht notwendigerweise endliches) abgeschlossenes Intervall $I \subseteq D$ sei $f(I) \subseteq I$. Außerdem gebe es eine reelle Zahl $M < 1$, so daß $|f'(x)| \le M$ ist für alle $x \in I$. Zeigen Sie, daß es dann genau ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$!

b) Was liefert Ihnen die vorige Aufgabe für die Konvergenz des Verfahrens von HERON?

c) V sei ein vollständiger normierter Vektorraum, und die Abbildung $f\colon V \to V$ erfülle für alle $x, y \in V$ und ein festes $q \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \le q\,\|x - y\|$. Weiter sei x^* ein Fixpunkt von f, $x_0 \in V$ ein beliebiger Punkt, und für $k \in \mathbb{N}$ sei x_k rekursiv definiert durch $x_k = f(x_{k-1})$. Zeigen Sie:

$$\|x^* - x_k\| \le \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\| .$$

d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = \cos x$ genau einen Fixpunkt $x \in \mathbb{R}$ hat!

e) Zeigen Sie, daß für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Folge mit $x_i = \cos x_{i-1}$ gegen diesen Fixpunkt konvergiert!

f) Zeigen Sie, daß $0 \le \sin x < x$ für alle positiven reellen Zahlen x!

g) Zeigen Sie, daß $f(x) = \sin x$ nicht kontrahierend ist auf dem Intervall $[-1, 1]$!

h) Zeigen Sie, daß trotzdem für jedes x_0 in $\mathbb{R}$ die Folge mit $x_i = \sin x_{i-1}$ konvergiert, und bestimmen Sie die möglichen Grenzwerte!

i) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\ge 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$ keinen Fixpunkt hat, daß aber trotzdem gilt: $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ für alle $x \ne y$ aus $\mathbb{R}_{\ge 0}$! Warum widerspricht dies nicht dem BANACHschen Fixpunktsatz?

j) Richtig oder falsch: Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[-10, 10]$ gleichmäßig gegen e^x.

k) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = e^{-x^2} - x$ genau eine Nullstelle hat, und geben Sie eine Folge an, die gegen diese Nullstelle konvergiert!

l) Richtig oder falsch: V sei ein BANACH-Raum, und die Abbildung $f\colon V \to V$ erfülle die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes. Dann ist f gleichmäßig stetig auf V.

m) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion?

n) Berechnen Sie für $f_0(x) \equiv 1$ die ersten Glieder der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f_{n-1}(t) - 2\big)\,dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und erraten Sie den Grenzwert!

o) Zeigen Sie, daß die erratene Funktion die Gleichungen

$$f(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f(t) - 2\big)\,dt \quad \text{und} \quad f'(x) = 2x\big(f(x) - 2\big)$$

erfüllt!