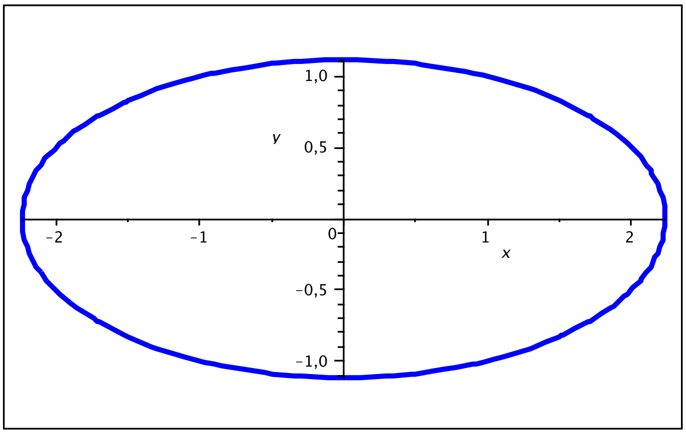
Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15.-17. April 2015

a) Welche der folgenden Mengen sind konvex, welche wegzusammenhängend und welche zusammenhängend?

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+4y^2<5\right\}, & B &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+4y^2\le 5\right\}\\
C &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+4y^2=5\right\}, & D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+4y^2\ne 5\right\}\\
E &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+4y^2\ge 5\right\}, & F &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+4y^2> 5\right\}\\
G &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4y^2<5\right\}, & H &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4y^2\le 5\right\}\\
I &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4y^2=5\right\}, & J &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4y^2\ne 5\right\}\\
K &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4y^2\ge 5\right\}, & L &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4y^2> 5\right\}
\end{aligned}$$

Lösung: Die Mengen A bis F hängen mit der hier abgebildeten Ellipse C zusammen.



A ist das Innere *ohne* den Ellipsenbogen, B besteht aus dem Inneren *mit* diesem Bogen. Beide Mengen sind offensichtlich konvex, d.h. sie enthalten zu je zwei Punkten (x,y) und (u,v) auch deren Verbindungsstrecke. Rechnerisch kann man dies für B wie folgt sehen: Ist $x^2+4y^2<5$ und $u^2+4v^2<5$, so ist für $\lambda\in[0,\,1]$

$$\big((1-\lambda)x+\lambda u\big)^2+4\big((1-\lambda)y+\lambda v\big)^2=(1-\lambda)^2(x^2+4y^2)+\lambda^2(u^2+4v^2)+2\lambda(1-\lambda)(xu+4yv)$$

Da $(x\pm u)^2\ge 0$ ist, folgt aus der zweiten binomischen Formel, daß $|xu|\le\frac12(x^2+u^2)$ ist, genauso auch $|yv|\le\frac12(y^2+v^2)$. Somit ist obiger Ausdruck höchstens gleich

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)^2(x^2+4y^2)+\lambda^2(u^2+4v^2)+\lambda(1-\lambda)(x^2+4y^2+u^2+4v^2)\\
&\quad\le\big((1-\lambda)^2+\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)\big)\cdot 5=\big((1-\lambda)+\lambda\big)^2\cdot 5=5\,.
\end{aligned}$$

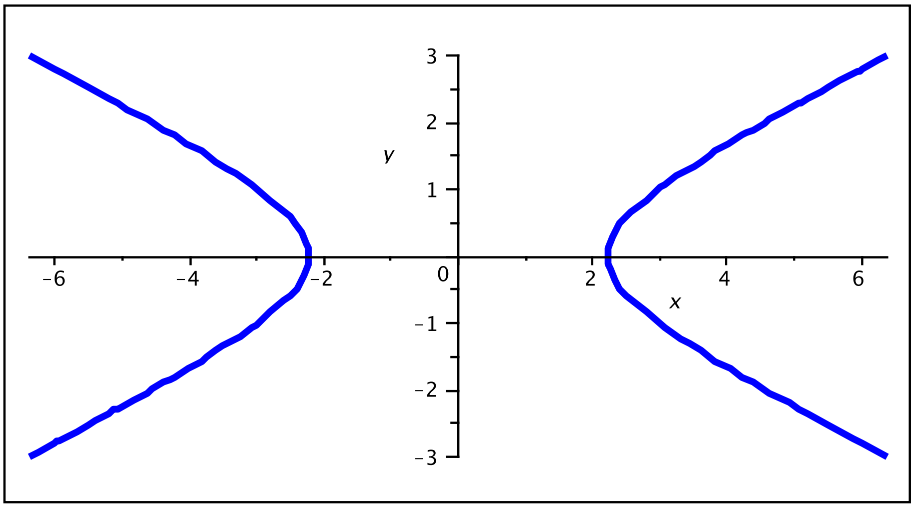
Daher liegt mit (x,y) und (u,v) auch der Punkt $(1-\lambda)(x,y)+\lambda(u,v)$ in B. Dieselbe Rechnung mit $\le$ statt $<$ zeigt die entsprechende Aussage für A. Also sind A und B konvex, also auch wegzusammenhängend und zusammenhängend.

C ist offensichtlich nicht konvex: Die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $\big(\pm\sqrt5,0\big)$ liegt nicht auf dem Ellipsenbogen. Trotzdem ist C wegzusammenhängend und damit auch zusammenhängend, denn je zwei Punkte auf dem Ellipsenbogen können durch das dazwischenliegende Bogenstück miteinander verbunden werden. Daß dies ein Weg ist, folgt beispielsweise aus dem Satz über implizite Funktionen oder durch eine Parameterdarstellung von C in der Form $C=\left\{(\sqrt5\cos t,\frac{\sqrt5}{2}\sin t)\;\middle|\;t\in[0,\,2\pi]\right\}$.

$D = A \cup F$ ist Vereinigung der beiden offenen Mengen A und F, die leeren Durchschnitt haben; daher ist D nicht zusammenhängend, also erst recht nicht wegzusammenhängend oder gar konvex.

E und F bestehen aus allen Punkten außerhalb der Ellipse, bei E einschließlich des Ellipsenbogens. Beide Mengen sind nicht konvex, da beispielsweise die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $(-5, 0)$ und $(5, 0)$ nicht ganz in E *bzw.* F liegt. Trotzdem sind beide Mengen wegzusammenhängend: Sind (x, y) und (u, v) zwei Punkte aus einer dieser Mengen, wobei o.B.d.A. $x^2 + 4y^2 = r_1$ kleiner oder gleich $u^2 + 4v^2 = r_2$ sei, so erfüllt mit $\alpha = \sqrt{r_2/r_1}$ der Punkt $(\alpha x, \alpha y)$ die Gleichung $(\alpha x)^2 + 4(\alpha y)^2 = r_2$, kann also durch einen Ellipsenbogen, der ganz in der Menge liegt, mit (u, v) verbunden werden. Da auch die Strecke von (x, y) nach $(\alpha x, \alpha y)$ ganz in der Menge liegt, haben wir einen Weg zwischen den beiden Punkten gefunden.

Die restlichen Mengen hängen zusammen mit der hier dargestellten Hyperbel I:



G und H sind der Bereich zwischen den beiden Hyperbelästen, mal mit, mal ohne die Hyperbel selbst. Beide sind nicht konvex, da sie die Verbindungsstrecke der Punkte $(4, 3)$ und $(4, -3)$ nicht enthalten. Sie sind aber wegzusammenhängend, denn zwei Punkte (x, y) und (u, v) können zum Beispiel durch den Streckenzug $(x, y) \to (0, y) \to (0, v) \to (u, v)$ miteinander verbunden werden. Damit sind diese Mengen auch zusammenhängend.

Die Hyperbel I ist schon visuell nicht zusammenhängend; formal sieht man dies zum Beispiel daran, daß sie durch die Vereinigung der beiden disjunkten offenen Mengen

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\right\} \quad \text{und} \quad V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < 0\right\}$$

überdeckt wird, aber natürlich nicht durch eine dieser Mengen allein. Dasselbe gilt auch für K und L. Auch $J = G \cup L$ ist disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen, also nicht zusammenhängend. Somit sind H bis L auch weder wegzusammenhängend noch konvex.

b) Ist $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 1 \quad \text{oder} \quad xy = 0\right\}$ wegzusammenhängend oder zusammenhängend?

Lösung: X besteht aus den beiden Ästen der Hyperbel $xy = 1$ sowie deren beiden Asymptoten, den Koordinatenachsen. Durch Ungleichungen nur für x oder nur für y können wir diese Kurven offensichtlich nicht trennen. Wir können aber eine weitere Hyperbel zwischen $xy = 1$ und den Koordinatenachsen einfügen, zum Beispiel die Hyperbel $xy = \frac{1}{2}$. Damit können wir die beiden offenen Mengen

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2xy > 1\right\} \quad \text{und} \quad V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2xy < 1\right\}$$

definieren, die offensichtlich X überdecken: Für jeden Punkt $(x, y) \in X$ ist entweder $2xy = 2$, so daß er in U liegt, oder $2xy = 0$, so daß er in V liegt. Da U und V leeren Durchschnitt haben, folgt, daß X nicht zusammenhängend ist.

c) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, wenn sie kompakt und zusammenhängend ist.

Lösung: Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist natürlich abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; außerdem ist jedes Intervall zusammenhängend.

Umgekehrt ist auch jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein (eventuell unendliches) Intervall; wenn sie auch noch kompakt ist, ist sie abgeschlossen und beschränkt, also ein abgeschlossenes Intervall.

d) Die *Lemniskate* zum Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ zusammenhängend und kompakt ist!

Lösung: Da Sinus und Kosinus periodisch mit Periode 2π sind, reicht es, nur die t-Werte aus dem Intervall $[0, 2\pi]$ zu betrachten. $\mathcal{L}_a$ ist somit das Bild dieses kompakten Intervalls unter der stetigen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) .$$

(Die Stetigkeit ist klar, da trigonometrische Funktionen und Grundrechenarten stetig sind und der Nenner nirgends verschwindet.) Da das Bild einer zusammenhängenden *bzw.* kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend *bzw.* kompakt ist, folgt die Behauptung.

e) Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_3$ nichtleeren Durchschnitt mit der Hyperbel $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ hat! *Hinweis:* Betrachten Sie den Wertebereich der Funktion $f(x, y) = xy$ auf $\mathcal{L}_3$!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß die Eins im Wertebereich von f liegt. Da $\mathcal{L}_3$ eine zusammenhängende Menge ist, ist auch dieser Wertebereich zusammenhängend; es reicht also, darin sowohl einen kleineren als auch einen größeren Wert zu finden. Für $t = 0$ erhalten wir den Punkt $(3, 0) \in \mathcal{L}_3$ mit $f(3, 0) = 0 < 1$, für $t = \frac{\pi}{4}$ mit $\sin t = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ den Punkt $(\sqrt{2}, 1)$ mit $f(\sqrt{2}, 1) = \sqrt{2} > 1$. Damit muß es ein $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ geben, so daß im entsprechenden Kurvenpunkt der Wert eins angenommen wird.

f) Zeigen Sie, daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^4 + y^4 = 2 \quad \text{und} \quad x^3 + 2xy^2 + 3xy^3 + 5y^5 = 4$$

mindestens eine reelle Lösung hat!

Lösung: Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 2\}$ ist eine Art Oval und sie ist insbesondere zusammenhängend, denn für jeden ihrer Punkte (x, y) ist $|x| \leq \sqrt[4]{2}$, und für jedes solche x liegen die Punkte (x, y) mit $y = \pm\sqrt[4]{2 - x^4}$ in M. Die Menge M besteht also aus den beiden Bögen $\{(x, y) \mid |x| \leq \sqrt[4]{2}$ und $y = \pm\sqrt[4]{2 - x^4}\}$, die als Bilder eines Intervalls beide wegzusammenhängend sind. Da sie sich in den Punkten $(\pm\sqrt[4]{2}, 0)$ treffen, ist also auch M wegzusammenhängend und damit zusammenhängend.

Wir betrachten die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 3xy^3 + 5y^5$ und müssen zeigen, daß sie irgendwo auf M den Wert vier annimmt. Da $g(M)$ als Bild einer zusammenhängenden Menge selbst zusammenhängend ist, reicht es, wenn wir zwei Punkte von M finden, so daß g in einem der beiden größer und im anderen kleiner als vier ist. Die einfachsten Punkte von M sind die vier Punkte $(\pm 1, \pm 1)$ mit $g(1, 1) = 11 > 4$ und $g(1, -1) = -5 < 4$. Damit haben wir zwei solche Punkte; das Gleichungssystem hat also mindestens eine reelle Lösung.

g) Zeigen Sie: Es gibt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}$ und $\tan(x^2 + y^2) = e^{xy} \cos(\pi x^2)$!

Lösung: Da die durch $x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}$ definierte offene Kreisscheibe zusammenhängend ist, wird sie von der stetigen Funktion

$$f(x, y) = \tan(x^2 + y^2) - e^{xy} \cos(\pi x^2)$$

auf ein Intervall abgebildet. Es genügt daher, wenn wir einen Punkt (x, y) aus dieser Kreisscheibe finden, in dem $f(x, y)$ positiv ist und einen anderen, in dem es negativ ist.

Der einfachste Punkt zum Einsetzen ist $(0, 0)$ mit $f(0, 0) = -1$. Die Funktion wird auch dann relativ einfach, wenn wir den Kosinus zum Verschwinden bringen, also $x = \pm\sqrt{1/2}$ setzen. Dann ist $f(x, y) = \tan(\frac{1}{2} + y^2) > 0$, denn $\frac{1}{2} + y^2$ muß kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein. Somit nimmt f auch den Wert Null an.

h) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge reeller Zahlen, so ist die Folge der Paare (x_n, x_{n+1}) eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{R}^2$.

Lösung: *Richtig:* Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|x_m - x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n, m \geq N$. Damit ist für $m, n > 0$ auch

$$\left\|(x_m, x_{m+1}) - (x_n, x_{n+1})\right\|_\infty = \max\left\{|x_m - x_n|, |x_{m+1} - x_{n+1}|\right\} < \varepsilon ,$$

wir haben also eine CAUCHY-Folge.

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, x_1 eine reelle Zahl, und durch $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \geq 2$ sei rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie: Konvergiert diese Folge gegen ein $x \in \mathbb{R}$, so ist x ein Fixpunkt von f !

Lösung: Ist $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, so ist wegen der Stetigkeit von f

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x .$$

j) Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = a$ und $x_n = \sin x_{n-1}$ für $n \geq 2$ gegen Null!

Lösung: Für $n \geq 2$ ist $|x_n| = |\sin x_{n-1}| \leq 1$. Da $\sin x$ für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ das gleiche Vorzeichen hat wie x, haben außerdem alle x_n mit $n \geq 2$ dasselbe Vorzeichen.

Ist $x_2 = 0$, sind auch alle weiteren $x_n = 0$ und wir sind fertig. Ist $x_2 > 0$, so ist die Folge der x_n ab $n = 2$ streng monoton fallend, da $\sin x < x$ für alle $x > 0$; außerdem ist sie nach unten beschränkt, da alle $x_n > 0$ sind. Als monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und nach der vorigen Aufgabe erfüllt der Grenzwert x die Gleichung $\sin x = x$. Somit ist auch hier $x = 0$.

Ist $x_2 < 0$, erhalten wir entsprechend eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge, und wieder folgt, daß der Grenzwert Null ist.

k) Finden Sie alle Fixpunkte der Funktion $f(x) = x^2 + c$ und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!

Lösung: $x^2 + c = x$ genau dann, wenn x die quadratische Gleichung

$$x^2 - x + c = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4} = 0$$

erfüllt, wenn also

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4c}$$

ist. Somit gibt es genau dann (reelle) Fixpunkte, wenn $c \leq \frac{1}{4}$ ist. Ein Fixpunkt ist stabil, wenn der Betrag der Ableitung von f dort kleiner als eins ist; wir haben also die Bedingung

$$|2x| = \left|1 \pm \sqrt{1-4c}\right| < 1 .$$

Im Falle des Pluszeichens erhalten wir die Bedingung $-1 < 1 + \sqrt{1-4c} < 1$, die offensichtlich nicht erfüllbar ist; der Fixpunkt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$ ist also für kein c stabil. Im Falle des Minuszeichens wird die Bedingung zu

$$-1 < 1 - \sqrt{1-4c} < 1 \quad \text{oder} \quad -2 < -\sqrt{1-4c} < 0 ,$$

was äquivalent ist zu $0 < \sqrt{1-4c} < 2$ oder $0 < 1-4c < 4$ oder $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$. Für $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$ somit ein stabiler Fixpunkt.

l) Finden Sie alle Fixpunkte von $f \circ f$ und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!

Lösung: Ein Fixpunkt von $f \circ f$ erfüllt die Gleichung

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = (x^2+c)^2 + c = x \quad \text{oder} \quad x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0 .$$

Unter den Lösungen dieser Gleichung sind insbesondere die Fixpunkte von f, also die Nullstellen von $x^2 - x + c$; diese kennen wir bereits aus der vorigen Aufgabe, wo auch ihre Stabilität diskutiert wurde. Um die restlichen zu bestimmen, können wir daher durch dieses quadratische Polynom dividieren:

$$(x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c) : (x^2 - x + c) = x^2 + x + c + 1 .$$

Die Nullstellen des Quotienten sind

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3-4c} ;$$

sie sind reell, wenn $c \leq -\frac{3}{4}$ ist. Um ihre Stabilität zu untersuchen, müssen wir $f \circ f$ ableiten; nach der Kettenregel erhalten wir $(f \circ f)'(x) = f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$. Da $f(x_1) = x_2$ und $f(x_2) = x_1$ ist *(warum?)*, ist also

$$(f \circ f)'(x_1) = f'(x_2) \cdot f'(x_1) = 2x_2 \cdot 2x_1 = 4x_1x_2 = 4(c+1) ,$$

denn das Produkt der beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung mit höchstem Koeffizienten eins ist der konstante Term. Für $(f \circ f)(x_2)$ erhalten wir natürlich dasselbe Ergebnis. x_1 und x_2 sind daher stabil, wenn $-1 < 4(c+1) < 1$ oder $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$ ist. Die neuen stabilen Fixpunkte von $f \circ f$ entstehen also genau bei dem Parameterwert $c = -\frac{3}{4}$, bei dem der stabile Fixpunkt von f verschwindet. Bezüglich f bilden x_1 und x_2 einen stabilen *Zweierzyklus,* d.h. die Folge der Funktionswerte pendelt ständig zwischen x_1 und x_2, und für einen Wert nahe x_1 oder x_2 nähern sich die weiteren Folgenglieder immer mehr an dieses Zyklus an.

m) Zur stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gebe es im Intervall $[a, b]$ einen Punkt c mit $f(c) < a$ und einen Punkt d mit $f(d) > b$. Zeigen Sie, daß es mindestens ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.

Lösung: Die stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$ hat an der Stelle $x = c$ den Wert $f(c) - c$; da $f(c) < a$, aber $c \geq a$ ist, ist dies eine negative Zahl. Entsprechend folgt, daß $g(d) = f(d) - b$ positiv ist, denn $f(d) > b$, aber $d \leq b$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher ein x zwischen c und d, also insbesondere aus $[a, b]$, für das $g(x) = 0$ ist, also $f(x) = x$, wie behauptet.