

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15.-17. April 2015

- a) Welche der folgenden Mengen sind konvex, welche wegzusammenhängend und welche zusammenhängend?

$$\begin{array}{ll} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 5\}, & B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 5\} \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 5\}, & D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \neq 5\} \\ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \geq 5\}, & F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 > 5\} \\ G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 < 5\}, & H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 \leq 5\} \\ I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 = 5\}, & J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 \neq 5\} \\ K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 \geq 5\}, & L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 > 5\} \end{array}$$

- b) Ist $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \text{ oder } xy = 0\}$ wegzusammenhängend oder zusammenhängend?
- c) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, wenn sie kompakt und zusammenhängend ist.
- d) Die *Lemniskate* zum Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, daß \mathcal{L}_a für jedes $a \in \mathbb{R}$ zusammenhängend und kompakt ist!

- e) Zeigen Sie, daß \mathcal{L}_3 nichtleeren Durchschnitt mit der Hyperbel $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ hat! *Hinweis:* Betrachten Sie den Wertebereich der Funktion $f(x, y) = xy$ auf \mathcal{L}_3 !
- f) Zeigen Sie, daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^4 + y^4 = 2 \quad \text{und} \quad x^3 + 2xy^2 + 3xy^3 + 5y^5 = 4$$

mindestens eine reelle Lösung hat!

- g) Zeigen Sie: Es gibt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}$ und $\tan(x^2 + y^2) = e^{xy} \cos(\pi x^2)$!
- h) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge reeller Zahlen, so ist die Folge der Paare (x_n, x_{n+1}) eine CAUCHY-Folge in \mathbb{R}^2 .
- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, x_1 eine reelle Zahl, und durch $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \geq 2$ sei rekursiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie: Konvergiert diese Folge gegen ein $x \in \mathbb{R}$, so ist x ein Fixpunkt von f !
- j) Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_1 = a$ und $x_n = \sin x_{n-1}$ für $n \geq 2$ gegen Null!
- k) Finden Sie alle Fixpunkte der Funktion $f(x) = x^2 + c$ und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!
- l) Finden Sie alle Fixpunkte von $f \circ f$ und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!
- m) Zur stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gebe es im Intervall $[a, b]$ einen Punkt c mit $f(c) < a$ und einen Punkt d mit $f(d) > b$. Zeigen Sie, daß es mindestens ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.