WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24.-27. März 2015

a) Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \quad \text{und} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge 0\}$$

abgeschlossen, während

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}, \quad E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne 0\} \quad \text{und} \quad F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$$

offen sind.

Lösung: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild einer jeden offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Da sowohl die negativen als auch die positiven Zahlen eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ bilden, sind D und F offen und damit auch $E = D \cup F$.
A, B und C sind die Komplemente der offenen Mengen F, E und D, also abgeschlossen.

b) Kann es Funktionen f geben, für die eine der Mengen A, B, C offen oder eine der Mengen D, E, F abgeschlossen ist?

Lösung: Nehmen wir für f die konstante Funktion eins (oder, für alle die es komplizierter wollen, $f(x_1, \dots, x_n) = 1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$), so sind $A = B = \emptyset$ und $C = \mathbb{R}^n$ offen und $D = \emptyset$ sowie $E = F = \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

c) Zeigen Sie, daß die Intervalle $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ eine offene Überdeckung sowohl des Intervalls $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ als auch des Intervalls $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ bilden. Für welches der beiden Intervalle gibt es eine endliche Teilüberdeckung, welches ist kompakt?

Lösung: Da bereits $(0, 1)$ beide Intervalle enthält, ist die Überdeckungseigenschaft klar; außerdem ist auch klar, daß in beiden Fällen die nur aus $(0, 1)$ bestehende Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung ist. Kompakt ist natürlich nur das abgeschlossene Intervall $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.

d) $\mathfrak{U}$ sei die Menge, deren Elemente die offenen Mengen

$$U_{a,b} \underset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < 1\}$$

mit $-1 \le a, b \le 1$ sind. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung des Rechtecks

$$R \underset{\text{def}}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \text{ und } -\frac{3}{2} \le y \le \frac{3}{2}\right\}$$

ist, und finden Sie eine endliche Teilüberdeckung!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß jeder Punkt $(x, y) \in R$ in mindestens einer der Mengen $U_{a,b}$ liegt. Falls $|x|$ und $|y|$ kleiner oder gleich eins sind, können wir einfach die Menge $U_{x,y}$ nehmen. Ist $|x| \le 1$ aber $|y| > 1$, so liegt (x, y) je nach Vorzeichen von y in einer der beiden Mengen $U_{x,1}$ und $U_{x,-1}$; entsprechend liegt der Punkt im Fall $|x| > 1$ und $|y| \le 1$ in einer der beiden Mengen $U_{1,y}$ und $U_{-1,y}$. Sind schließlich beide Beträge größer als eins, so liegt (x, y) in einer der vier Mengen $U_{\pm 1, \pm 1}$, denn eine der Zahlen $|x-1|$ und $|x+1|$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$, genauso auch eine der Zahlen $|y-1|$ und $|y+1|$; da die Summe von deren Quadraten kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, liegt (x, y) in einer der vier Kreisscheiben.
Mit dem gleichen Argument können wir auch eine endliche Teilüberdeckung angeben: Zu jedem $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ gibt es ein

$$a \in M \underset{\text{def}}{=} \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

so daß $|x-a|<\frac{1}{2}$ ist und zu y ein $b\in M$ mit $|y-b|<\frac{1}{2}$; damit liegt jeder Punkt $(x,y)\in R$ in einer der 25 Mengen $M_{a,b}$ mit $a,b\in M$. (Das ist natürlich nicht die kleinste endliche Teilüberdeckung!)

e) Finden Sie eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ der offenen Kreisscheibe

$$D \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2<2\right\},$$

die keine endliche Teilüberdeckung hat!

Lösung: Wir können zum Beispiel die Überdeckung aus den offenen Kreisscheiben

$$U_n \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2<2-\frac{1}{n}\right\}$$

betrachten. Alle zusammen überdecken D, aber die Vereinigung endlich vieler U_n ist einfach die Menge U_n mit den größten Index n, und die ist kleiner als D.

f) Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$\begin{array}{ll}
A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2<5\right\}, & B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2\le 5\right\}\\
C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2=5\right\}, & D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2\ne 5\right\}\\
E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2\ge 5\right\}, & F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2>5\right\}\\
G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2<5\right\}, & H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2\le 5\right\}\\
I=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2=5\right\}, & J=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2\ne 5\right\}\\
K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2\ge 5\right\}, & L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2>5\right\}
\end{array}$$

Lösung: Die Mengen A,D,F,G,J,L sind nicht abgeschlossen, da sie beispielsweise ihren Randpunkt $(\sqrt{5},0)$ nicht enthalten; E,F,H,I,J,K und L sind nicht beschränkt. Somit kommen höchstens B und C in Frage. Wie wir aus Aufgabe *a)* wissen, sind beide abgeschlossen, und beide sind auch beschränkt, da $|x|$ und $|y|$ auf jeden Fall kleiner als drei sein müssen. Somit sind diese beiden Mengen kompakt.

g) Richtig oder falsch: Die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Lösung: *Richtig:* Ist $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung der Vereinigung $A\cup B$ zweier kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so ist $\mathfrak{U}$ auch eine offene Überdeckung von sowohl A als auch B. Zur Überdeckung von A reicht wegen der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung $\mathfrak{U}_1$, für B entsprechend eine endliche Teilüberdeckung $\mathfrak{U}_2$, und damit ist $\mathfrak{U}_1\cup\mathfrak{U}_2$ eine endliche Teilüberdeckung von $A\cup B$.

h) Richtig oder falsch: Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Lösung: Das ist natürlich falsch: Beispielsweise ist jede einelementige Menge kompakt, da abgeschlossen und beschränkt; also läßt sich jede beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als Vereinigung kompakter Mengen schreiben, aber nicht jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Konkretes Beispiel: Für $n\in\mathbb{Z}$ sei $K_n=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \|y-(n,\dots,n)\|<1\}$. Selbstverständlich ist jede der Mengen K_n kompakt, egal welche Norm wir nehmen, aber die Vereinigung aller K_n ist unbeschränkt und damit nicht kompakt.

i) Richtig oder falsch: Sind $X\subset\mathbb{R}^n$ und $Y\subset\mathbb{R}^m$ kompakt, so ist auch $X\times Y\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ kompakt.

Lösung: *Richtig:* Wir arbeiten mit den Maximumsnormen auf $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^{n+m}$. Da X und Y als kompakte Mengen beschränkt sind, gibt es reelle Zahlen N,M, so daß

$$\|x\|=\max\left\{|x_1|,\dots,|x_n|\right\}\le N \quad \text{für alle } x=(x_1,\dots,x_n)\in X$$

und
$$\|y\| = \max\{|y_1|, \ldots, |y_m|\} \le M \quad \text{für alle } y = (y_1, \ldots, y_m) \in Y$$
Damit ist $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \le \max\{N, M\}$ für alle $(x,y) \in X \times Y$, so daß auch $X \times Y$ beschränkt ist.

Um zu zeigen, daß $X \times Y$ auch abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, daß das Komplement offen ist. Sei also $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus X \times Y$. Dann ist $x \notin X$ oder $y \notin Y$ oder beides. Indem wir nötigenfalls die Reihenfolge der Faktoren vertauschen, können wir annehmen, daß $x \notin X$. Da $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $u \notin X$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - u\| < \varepsilon$.

Ist $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ein Punkt mit $\|(x,y) - (u,v)\| \le \varepsilon$, so ist insbesondere $\|x - u\| < \varepsilon$; also $u \notin X$ und damit auch $(u,v) \notin X \times Y$. Somit ist $X \times Y$ auch abgeschlossen, also kompakt.

j) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ geometrisch!

Lösung: Das ist natürlich eine (Voll-)Ellipse mit Halbachsen eins und zwei.

k) Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = x - 2x^2 - 3y^2$ auf M!

Lösung: $\nabla f = \begin{pmatrix} 1-4x \\ -6y \end{pmatrix}$ verschwindet nur im Punkt $x = \frac14$ und $y = 0$. Dort (wie auch überall sonst) ist die Hesse-Matrix
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$
negativ definit; f hat im Punkt $\left(\frac14, 0\right)$ also ein relatives Maximum; der Funktionswerte ist dort
$$\frac14 - \frac{2}{16} = \frac18\,.$$
Für Extrema auf dem Rand müssen ∇f und ∇g für $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ linear abhängig sein. Da $\nabla g = \binom{2x}{y/2}$ nur im Nullpunkt verschwindet, der nicht auf dem Rand liegt, gibt es für jedes Extremum auf dem Rand ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit
$$1 - 4x = 2\lambda x \quad \text{und} \quad -6y = \lambda\frac{y}{2} \;\text{ oder }\; \frac{y}{2}(\lambda + 12) = 0\,.$$
Für $\lambda = -12$ wird die erste Gleichung zu $1 - 4x = -24x$ oder $x = -1/20$. Aufgrund der Ellipsengleichung muß dann $y = \pm 2\sqrt{1 - (1/20)^2} = \pm\sqrt{399}/10$ sein. Für $y = 0$ ist natürlich $x = \pm 1$.

Auf dem kompakten Ellipsenbogen nimmt f als stetige Funktion sowohl sein Maximum als auch sein Minimum an; wegen
$$f(1,0) = 1 - 2 = -1, \quad f(-1,0) = -1 - 2 = -3 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{20}, \pm\frac{\sqrt{399}}{10}\right) = -\frac{481}{40} = -12\frac{1}{40}$$
wird in den beiden Punkten mit $x = -1/20$ das Minimum auf dem Rand angenommen und damit auch auf ganz M angenommen. Bei $(\pm 1, 0)$ liegen relative Maxima für die auf den Rand eingeschränkte Funktion; da das Maximum im Innern größer ist, wird das absolute Maximum bei $(\frac14, 0)$ angenommen mit Funktionswert $1/8$.

l) Finden Sie sowohl das absolute Maximum als auch das absolute Minimum der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 \le 5$!

Lösung: Da $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \le 5\}$ kompakt ist (es handelt sich um eine ellipsenförmige Scheibe), muß f in K sowohl sein Maximum als auch sein Minimum annehmen. Falls dies in einem inneren Punkt geschähe, müßte dort wegen der Differenzierbarkeit von f der Gradient verschwinden.
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

verschwindet aber nur im Nullpunkt; dort ist offensichtlich weder ein Maximum noch ein Minimum. (Betrachten Sie die Funktion $h(x) = x^3$.)

Somit liegen sowohl das Maximum als auch das Minimum auf dem Rand; dort ist also $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 5 = 0$. Da auch der Gradient von g nur im Nullpunkt verschwindet, für den $g(0, 0) = -5$ nicht verschwindet, muß es für jeden Punkt (x, y) mit $g(x, y) = 0$, für den $f(x, y)$ maximal oder minimal wird, ein $\lambda \neq 0$ geben, so daß

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)\,, \text{ das heißt } \quad \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$

ist. Wir haben also die beiden Gleichungen

$$3x^2 - 2\lambda x = x(3x - 2\lambda) = 0 \quad \text{und} \quad 3y^2 - 4\lambda y = y(3y - 4\lambda) = 0\,.$$

Die erste Gleichung ist erfüllt, wenn entweder $x = 0$ ist oder $\lambda = \frac{3}{2}x$. Im ersten Fall können wir y über die Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 = 5$ bestimmen: Offensichtlich kommen nur $y = \pm\sqrt{5/2}$ in Frage, und zu beiden Werten läßt sich ein λ finden, so daß $3y - 4\lambda$ verschwindet.

Entsprechend ist die zweite Gleichung erfüllt, wenn y verschwindet oder aber $\lambda = \frac{3}{4}y$; im ersten Fall führt die Nebenbedingung auf $x = \pm\sqrt{5}$, und dazu gibt es natürlich ein λ, für das $3x - 2\lambda$ verschwindet.

Bleibt noch der Fall, daß x und y beide von Null verschieden sind. Dann ist $3x = 2\lambda$ und $3y = 4\lambda$, also $y = 2x$. Einsetzen in die Nebenbedingung zeigt, daß dann $9x^2 = 5$ sein muß, d.h. $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{5}$ und $y = 2x$.

Für das gesuchte Maximum und Minimum kommen damit nur folgende sechs Punkte in Frage:

$$\left(0, \pm\sqrt{5/2}\right), \quad \left(\pm\sqrt{5}, 0\right) \quad \text{und} \quad \pm\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{5}, \tfrac{2}{3}\sqrt{5}\right).$$

Die Funktionswerte dort sind

$$\pm\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \pm 5\sqrt{5} \quad \text{und} \quad \pm\frac{5\sqrt{5}}{3}\,.$$

Da wir wissen, daß sowohl Maximum als auch Minimum angenommen werden, müssen wir diese Werte miteinander vergleichen; offensichtlich ist $5\sqrt{5}$ der betragsgrößte Wert. Das absolute Maximum wird daher angenommen im Punkt $\left(\sqrt{5}, 0\right)$ und das absolute Minimum im Punkt $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$; die Funktionswerte dort sind $\pm 5\sqrt{5}$.