Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24.-27. März 2015

a) Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \quad \text{und} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge 0\}$$

abgeschlossen, während

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}, \quad E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne 0\} \quad \text{und} \quad F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$$

offen sind.

b) Kann es Funktionen f geben, für die eine der Mengen A, B, C offen oder eine der Mengen D, E, F abgeschlossen ist?

c) Zeigen Sie, daß die Intervalle $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ eine offene Überdeckung sowohl des Intervalls $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ als auch des Intervalls $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ bilden. Für welches der beiden Intervalle gibt es eine endliche Teilüberdeckung, welches ist kompakt?

d) $\mathfrak{U}$ sei die Menge, deren Elemente die offenen Mengen

$$U_{a,b} \underset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < 1\}$$

mit $-1 \le a, b \le 1$ sind. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung des Rechtecks

$$R \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \text{ und } -\frac{3}{2} \le y \le \frac{3}{2}\right\}$$

ist, und finden Sie eine endliche Teilüberdeckung!

e) Finden Sie eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ der offenen Kreisscheibe

$$D \underset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\},$$

die keine endliche Teilüberdeckung hat!

f) Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 < 5\}, & B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \le 5\}\\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 5\}, & D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \ne 5\}\\
E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \ge 5\}, & F &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 > 5\}\\
G &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 < 5\}, & H &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \le 5\}\\
I &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 5\}, & J &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \ne 5\}\\
K &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \ge 5\}, & L &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 > 5\}
\end{aligned}$$

g) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

h) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

i) *Richtig oder falsch:* Sind $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, so ist auch $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ kompakt.

j) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ geometrisch!

k) Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = x - 2x^2 - 3y^2$ auf M!

l) Finden Sie sowohl das absolute Maximum als auch das absolute Minimum der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 \le 5$!