Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18.-20. März 2015

a) Berechnen Sie die Hesse-Matrix der Funktion $g(x,y,z) = \sin(xy+yz+xz) + e^{2x+3y+5z}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
g_x(x,y,z) &= (y+z)\cos(xy+yz+xz) + 2e^{2x+3y+5z}\\
g_y(x,y,z) &= (x+z)\cos(xy+yz+xz) + 3e^{2x+3y+5z}\\
g_z(x,y,z) &= (x+y)\cos(xy+yz+xz) + 5e^{2x+3y+5z}\\
g_{xx}(x,y,z) &= -(y+z)^2\sin(xy+yz+xz) + 4e^{2x+3y+5z}\\
g_{xy}(x,y,z) &= -(x+z)(y+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 6e^{2x+3y+5z} = g_{yx}(x,y,z)\\
g_{xz}(x,y,z) &= -(x+y)(y+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 10e^{2x+3y+5z} = g_{zx}(x,y,z)\\
g_{yy}(x,y,z) &= -(x+z)^2\sin(xy+yz+xz) + 9e^{2x+3y+5z}\\
g_{yz}(x,y,z) &= -(x+y)(x+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 15e^{2x+3y+5z}s = g_{zy}(x,y,z)\\
g_{zz}(x,y,z) &= -(x+y)^2\sin(xy+yz+xz) + 25e^{2x+3y+5z}
\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

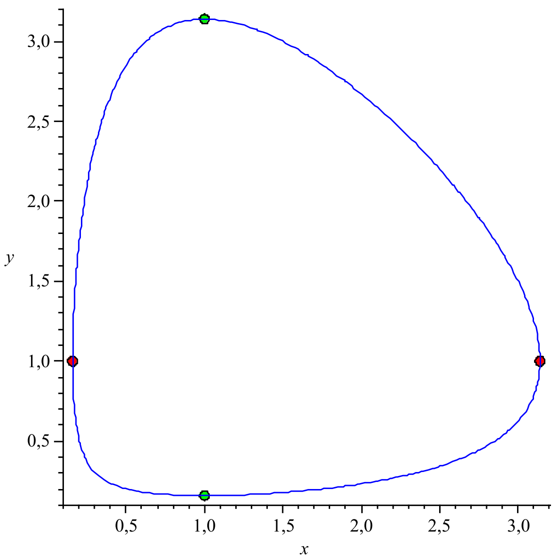
$$S = \sin(xy+yz+xz), \quad C = \cos(xy+yz+xz) \quad \text{und} \quad E = e^{3x+3y+5z}$$

ist somit $H_f(x,y,z) =$

$$\begin{pmatrix} -(y+x)^2S+4\,E & -(x+z)(y+z)S+C+6\,E & -(x+y)(y+z)S+C+10\,E\\ -(x+z)(y+z)S+C+6\,E & -(x+z)^2S+9\,E & -(x+y)(x+z)S+C+15\,E\\ -(x+y)(y+z)S+C+10\,E & -(x+y)(x+z)S+C+15\,E & -(x+y)^2S+25\,E \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie: Die Gleichung $F(x,y) = 20xy - e^{x+y}$ läßt genau dann im Kurvenpunkt (x,y) nach y auflösen, wenn $y \neq 1$ ist, und die entstehende Funktion hat genau im Punkt $x = 1$ ein Extremum – falls $x = 1$ im Definitionsbereich liegt.

Lösung: Wenn $F_y(x,y) = 20x - e^{x+y}$ und $F(x,y) = 20xy - e^{x+y}$ gleichzeitig verschwinden, ist $20x = 20xy$. Der Fall $x = 0$ kann nicht eintreten, da $F(0,y) = -e^{x+y}$ nirgends verschwindet; also muß $y = 1$ sein. Um alle anderen Punkte läßt sich die Gleichung also auflösen in der Form $y = f(x)$. In einem Extremum ist $f'(x) = 0$, also $F_x(x,y) = 20y - e^{x+y} = 0$. Wie oben folgt, daß dies für einen Punkt mit $F(x,y) = 0$ nur gelten kann, wenn $x = 1$ ist.



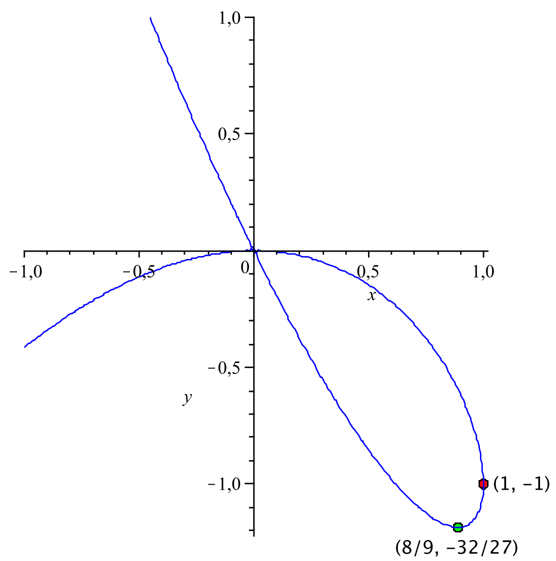
c) Wann ist dieses Extremum ein Maximum, wann ein Minimum?

Lösung: Nach der Formel aus der Vorlesung ist in einem Punkt, in dem die erste Ableitung verschwindet,
$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(x,y)}{F_y(x,y)} = \frac{e^{x+y}}{20x - e^{x+y}} .$$
Da der Zähler hier stets positiv ist, hat $f''(1)$ das gleiche Vorzeichen wie $20 - e^{y+1}$, ist also positiv, wenn $e^{y+1} < 20$ ist und negativ im Falle $e^{x+y} > 20$. Für $y < \log 20 - 1 \approx 1{,}995732274$ haben wir also ein Minimum, für $x > \log 20 - 1$ ein Maximum.

d) In welchen Punkten läßt sich die Gleichung $F(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 = 0$ nach y auflösen, und in welchen Punkten hat die erhaltene Funktion $y = f(x)$ ein lokales Extremum?

Lösung: $F_y(x,y) = 2x + 2y$ verschwindet genau dann, wenn $y = -x$ ist. Für den Punkt $(x,-x)$ ist $f(x,-x) = 0 = x^3 - 2x^2 + x^2 = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$; das verschwindet für $x = 0$ und $x = 1$. Die Punkte $(0,0)$ und $(1,-1)$ sind also die einzigen, in denen sich die Gleichung nicht nach y auflösen läßt.

In den anderen Kurvenpunkten erhalten wir eine Funktion $y = g(x)$ mit
$$g'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + 2y}{2x + 2y} ;$$
ist $g'(x) = 0$, muß also $F_x(x,y) = 3x^2 + 2y = 0$ sein und $y = -\frac{3}{2}x^2$. Einsetzen in F ergibt
$$F(x, -\tfrac{3}{2}x^2) = x^3 - 3x^3 + \tfrac{9}{4}x^4 = x^3(\tfrac{9}{4}x - 2) .$$
Das verschwindet für $x = 0$ und damit auch $y = 0$, aber dort ist die Gleichung $f(x,y) = 0$ nicht eindeutig nach y auflösbar. Die andere Nullstelle ist $x = \frac{8}{9}$ und $y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{8^2}{9^2} = -\frac{32}{27}$. In diesem Punkt verschwindet also $g'(x)$, und die zweite Ableitung dort ist nach der Vorlesung
$$g''(x) = -\frac{F_{xx}(x,y)}{F_y(x,y)} = \frac{-6x}{2x + 2y} .$$
Im betrachteten Punkt ist der Zähler negativ und der Nenner wegen $\frac{8}{9} - \frac{32}{27} = \frac{24-32}{27} = -\frac{8}{27}$ auch; daher ist $g''(x) > 0$; im Punkt $(\frac{8}{9}, -\frac{32}{27})$ hat g also ein Minimum.



e) Welche quadratische Form definiert die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Lösung: $Q(x,y,z) = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 2z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix}$
$= x^2 + 2xy + 3xz + 2yx + 2yz + 3zx + 2zy + z^2 = x^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 4yz\,.$

f) Welche symmetrische Matrix führt zu $Q(x,y) = (x + 2y)^2$?

Lösung: $Q(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$; da die quadratische Form zu Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ gleich $ax^2 + 2bxy + dy^2$ ist, muß hier also $a = 1$, $b = 2$ und $d = 4$ sein, d.h. die Matrix ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

g) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ indefinit? Geben Sie jeweils einen negativen und einen positiven Wert der zugehörigen quadratischen Form an!

Lösung: Die Determinante $1 - a^2$ ist genau dann negativ, wenn $|a| > 1$ ist. Die zugehörige quadratische Form ist

$$Q(x,y) = x^2 + 2axy + y^2 = (x + y)^2 + 2(a - 1)xy\,.$$

Somit ist $Q(1,1) = 4 + 2(a - 1) = 2 + 2a$ für $a > 1$ positiv und für $a < -1$ negativ; bei $Q(1,-1) = 2(1 - a)$ ist es jeweils umgekehrt.

h) *Richtig oder falsch:* A sei eine obere $n \times n$-Dreiecksmatrix und

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

die zugehörige quadratische Form. Falls alle Diagonaleinträge positiv sind, ist $Q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

Lösung: *Falsch,* für $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $Q(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$, und das ist indefinit: $Q(1,1) = 5$, aber $Q(1,-1) = -1$.

i) Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen positiv *bzw.* negativ definit oder indefinit sind oder keine dieser Eigenschaften haben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det A = 5 - 4 = 1 > 0$ und auch der Eintrag links oben ist positiv; also ist A positiv definit.
$\det B = 4 - 4 = 0$ verschwindet; die Matrix ist weder positiv noch negativ definit noch indefinit. (Sie ist aber positiv semidefinit, denn die zugehörige quadratische Form ist $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$.)
$\det C = 10 - 9 = 1$ ist positiv und der Eintrag oben links ist negativ; also ist die Matrix negativ definit.
$\det D = -1 - 1 = -2$ ist negativ, also ist die Matrix indefinit.
Die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ hat Determinante $32 - 25 = 7$; also ist sie positiv definit. Die quadratische Form zu F ist die Summe von $3x^2$ und der quadratischen Form in y, z zu dieser positiv definiten Matrix, also ist auch F positiv definit.

j) Gegeben seien N Meßwerte $x_1, \dots, x_n$ für eine feste Größe. Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ wird die Summe der $(c - x_i)^2$ minimal?

Lösung:

$$\frac{\partial}{\partial c} \sum_{i=1}^{N} (c - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{N} (x_i - c) = 2 \sum_{i=1}^{N} x_i - 2Nc$$

verschwindet genau dann, wenn $c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$ das arithmetische Mittel derx_i ist; somit ist dies der im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate optimale Schätzwert.

k) Gegeben seien N Datenpaare (x_i, y_i), die ungefähr proportional zueinander sein sollten. Finden sie das im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestmögliche $a \in \mathbb{R}$, so daß $y_i \approx a x_i$ ist!

Lösung: Schreiben wir die Bedingungen $y_i = a x_i$ um zu einem Gleichungssystem für a, hat dieses als Matrix den Spaltenvektor mit Einträgen x_i und als rechte Seite den mit Einträgen y_i. Multiplikation mit dem *Zeilenvektor* $(x_1, \dots, x_n)$ macht daraus die Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) a = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \, ;$$

falls nicht alle x_i verschwinden, ist dies eindeutig lösbar durch

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2} \, .$$

l) Warum läßt sich a nicht einfach als Durchschnitt der $\dfrac{y_i}{x_i}$ berechnen?

Lösung: Wie die vorletzte Aufgabe zeigt, minimiert der Durchschnitt D die Summe

$$\sum_{i=1}^{N} \left(D - \frac{y_i}{x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2} (D x_i - y_i)^2 \, ;$$

die Abweichungen zwischen linker und rechter Seite der Geradengleichung würden also umso stärker gewichtet, je kleiner x_i^2 ist. Außerdem hätten wir im Extremfall $x_i = 0$ gar keinen Quotienten y_i / x_i.

m) Gegeben seien hundert Meßwerte (x_i, t_i), wobei theoretisch ein Zusammenhang der Form

$$x_i = a \sin t_i + b \sin 2t_i + c \sin 3t_i + d \sin 4t_i$$

bestehen sollte. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösungen im Sinne der kleinsten Quadrate die beste Schätzung für a, b, c, d liefern!

Lösung: Die gesuchten Größen a, b, c, d sollten theoretisch das lineare Gleichungssystem aus den hundert Gleichungen

$$(\sin t_i) \cdot a + (\sin 2t_i) \cdot b + (\sin 3t_i) \cdot c + (\sin 4t_i) \cdot d = x_i$$

erfüllen. Dessen Matrix A hat vier Spalten, wobei die Einträge der j-ten Spalte gleich den Zahlen $\sin j t_i$ sind. Damit ist ${}^tAA$ eine 4×4-Matrix mit Einträgen

$$a_{k\ell} = \sum_{i=1}^{100} \sin k t_i \cdot \sin \ell t_i \, .$$

Als rechte Seite des Gleichungssystem haben wir den Vektor

$${}^tA\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} x_i \sin t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{100} x_i \sin 4t_i \end{pmatrix} ,$$

das Gleichungssystem besteht also aus den vier Gleichungen

$$\left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 2t_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 3t_i\right) c$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 4t_i\right) d = \sum_{i=1}^{100} x_i \sin kt_i$$

für $k = 1, \dots, 4$.

n) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = A\cos(t_i + \varphi)$ zu erwarten ist?

Lösung: Das Problem hier ist, daß die Gleichungen nicht linear in φ sind. Nach der Additionsformel für den Kosinus ist aber

$$\cos(t_i + \varphi) = \cos t_i \cos\varphi - \sin t_i \sin\varphi\,,$$

d.h. $x_i = a\cos t_i + b\sin t_i$ mit $a = A\cos\varphi$ und $b = -A\sin\varphi$.

Dieses Gleichungssystem ist linear in a und b, kann also nach der Methode aus der Vorlesung gelöst werden: Multiplikation mit der Transponierten der Matrix des Gleichungssystems führt auf

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \cos^2 t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin t_i \cos t_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i \cos t_i$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \sin t_i \cos t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin^2 t_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i \sin t_i\,.$$

Dieses Gleichungssystem liefert a und b; daraus läßt sich A berechnen als

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und φ durch die beiden Bedingungen

$$\cos\varphi = \frac{a}{A} \quad\text{und}\quad \sin\varphi = -\frac{b}{A}\,.$$

(Man benötigt beide Bedingungen um φ modulo 2π zu kennen; eine allein liefert nur φ modulo π.)

o) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare (k, k^2), $k = 1, \dots, 5$!

Lösung: Da $1+2+3+4+5 = 15$ und $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 1+4+9+16+25 = 55$; der Mittelwert der ersten Komponenten ist also 3, der der zweiten 11. Somit ist die Summe der quadratischen Abweichungen vom Mittelwert

$$(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 10$$

beziehungsweise

$$(1-11)^2 + (4-11)^2 + (9-11)^2 + (16-11)^2 + (25-11)^2 = 10^2 + 7^2 + 2^2 + 5^2 + 14^2 = 374\,.$$

Die Summe der Produkte dieser Abweichungen ist

$$(1-3)(1-11)+(2-3)(4-11)+(3-3)(9-11)+(4-3)(16-11)+(5-3)(25-11) = 20+7+5+28 = 60\,.$$

Demnach ist $\kappa = \dfrac{60}{\sqrt{10\cdot 374}} \approx 0{,}9811$.

p) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$, $k = 1, \dots, 100$!

Lösung: Da $\cos^2 k = 1 - \sin^2 k$ für alle k, liegen die Datenpaare auf der Geraden $y = 1 - x$. Deren Steigung ist negativ, also ist der Korrelationskoeffizient gleich -1.