Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18.-20. März 2015

a) Berechnen Sie die Hesse-Matrix der Funktion $g(x,y,z) = \sin(xy+yz+xz) + e^{2x+3y+5z}$!

b) Zeigen Sie: Die Gleichung $F(x,y) = 20xy - e^{x+y}$ läßt genau dann im Kurvenpunkt (x,y) nach x auflösen, wenn $y \neq 1$ ist, und die entstehende Funktion hat genau im Punkt $x = 1$ ein Extremum – falls $x = 1$ im Definitionsbereich liegt.

c) Wann ist dieses Extremum ein Maximum, wann ein Minimum?

d) In welchen Punkten läßt sich die Gleichung $F(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 = 0$ nach y auflösen, und in welchen Punkten hat die erhaltene Funktion $y = f(x)$ ein lokales Extremum?

e) Welche quadratische Form definiert die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

f) Welche symmetrische Matrix führt zu $Q(x,y) = (x+2y)^2$?

g) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ indefinit? Geben Sie jeweils einen negativen und einen positiven Wert der zugehörigen quadratischen Form an!

h) *Richtig oder falsch:* A sei eine obere $n \times n$-Dreiecksmatrix und

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

die zugehörige quadratische Form. Falls alle Diagonaleinträge positiv sind, ist $Q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

i) Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen positiv *bzw.* negativ definit oder indefinit sind oder keine dieser Eigenschaften haben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

j) Gegeben seien N Meßwerte $x_1, \dots, x_n$ für eine feste Größe. Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ wird die Summe der $(c - x_i)^2$ minimal?

k) Gegeben seien N Datenpaare (x_i, y_i), die ungefähr proportional zueinander sein sollten. Finden sie das im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestmögliche $a \in \mathbb{R}$, so daß $y_i \approx a x_i$ ist!

l) Warum läßt sich a nicht einfach als Durchschnitt der $\dfrac{y_i}{x_i}$ berechnen?

m) Gegeben seien hundert Meßwerte (x_i, t_i), wobei theoretisch ein Zusammenhang der Form

$$x_i = a \sin t_i + b \sin 2t_i + c \sin 3t_i + d \sin 4t_i$$

bestehen sollte. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösungen im Sinne der kleinsten Quadrate die beste Schätzung für a, b, c, d liefern!

n) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = A \cos(t_i + \varphi)$ zu erwarten ist?

o) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare (k, k^2), $k = 1, \dots, 5$!

p) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$, $k = 1, \dots, 100$!