WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11.-13. März 2015

a) Zeigen Sie sowohl durch direkte Anwendung der Definition als auch über die CAUCHY-RIEMANNschen Differentalgleichungen, daß die Funktion $f(z) = z^3$ komplex differenzierbar ist und daß $f'(z) = 3z^2$ ist!

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^3 - z^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z^3 + 3z^2h + 3zh^2 + h^3 - z^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3z^2 + 3zh + h^2) = 3z^2 .$$

Für $z = x + iy$ ist

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) .$$

Der Realteil ist somit $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ und der Imaginärteil ist $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Die partiellen Ableitungen davon sind

$$u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y(x,y) = -6xy, \quad v_x(x,y) = 6xy \quad \text{und} \quad v_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2 ,$$

also ist $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, wie es die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verlangen. Die Ableitung von f ist

$$f'(z) = f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 6ixy = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3(x+iy)^2 = 3z^2 .$$

b) Ist die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x$ komplex differenzierbar?

Lösung: Der Realteil von $f(x+iy)$ ist $u(x, y) = x$, der Imaginärteil ist $v(x, y) = 0$. Also ist $u_x(x, y) = 1$, aber $v_y(x, y) = 0$, so daß die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen nicht erfüllt sind. Somit ist die Funktion nicht komplex differenzierbar.

c) $f: D \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion auf $D \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Die beiden Bedingungen

- Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$, so daß $f(z+h) = f(z) + ch + o\big(|h|\big)$ und
- $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existiert

sind äquivalent.

Lösung: Wenn der Grenzwert

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} ,$$

existiert, hat die Funktion

$$\widetilde{g}(h) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - c$$

für $h \to 0$ den Grenzwert 0. Mit $g(h) = h\widetilde{g}(h)$ ist dann

$$g(h) = f(z+h) - f(h) - ch \quad \text{oder} \quad f(z+h) = f(z) + ch + g(h) .$$

Dabei ist

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{g(h)}{h} \right| = \lim_{h\to 0} \widetilde{g}(h) = 0 ,$$

also ist auch

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{|h|} = 0 .$$

Damit ist $g(h) = o\big(|h|\big)$.

Umgekehrt sei $f(z+h) = f(z) + ch + o\big(|h|\big)$. Dann ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z) + ch + o(h) - f(z)}{h} = c + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = c ,$$

der Limes existiert also.

d) Zeigen Sie, daß die LEIBNIZ-Regel für die Ableitung eines Produkts auch für komplex differenzierbare Funktionen gilt!

Lösung: Dies läßt sich einerseits genau wie im Reellen über die Linearisierbarkeit beweisen:

$$\begin{aligned}(fg)(z+h) = f(z+h)g(z+h) &= \big(f(z)+f'(z)h+o(|h|)\big)\big(g(z)+g'(z)h+o(|h|)\big)\\ &= f(z)g(z)+\big(f'(z)g(z)+f(z)g'(z)\big)h+o(|h|)\,,\end{aligned}$$

denn jedes Produkt einer Funktion, die $o(|h|)$ ist mit einer beschränkten Funktion ist selbst $o(|h|)$, und auch die Summe zweier solcher Funktionen ist $o(|h|)$.

Wenn wir stattdessen die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verwenden, erhalten wir mit

$$f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y) \quad \text{und} \quad g(x,y) = p(x,y)+iq(x,y)$$

die Darstellung

$$f(x+iy)g(x+iy) = \big(u(x,y)p(x,y)-v(x,y)q(x,y)\big)+i\big(u(x,y)q(x,y)+v(x,y)p(x,y)\big)\,.$$

Die partielle Ableitung des Realteils nach x ist

$$u_x(x,y)p(x,y)+u(x,y)p_x(x,y)-v_x(x,y)q(x,y)-v(x,y)q_x(x,y)\,,$$

und die des Imaginärteils nach y ist

$$u_y(x,y)q(x,y)+u(x,y)q_y(x,y)+v_y(x,y)p(x,y)+v(x,y)p_y(x,y)\,.$$

Da $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, $p_x = q_y$ und $p_y = -q_x$, stimmen beide überein.

Entsprechend ist die partielle Ableitung des Realteils nach y gleich

$$u_y(x,y)p(x,y)+u(x,y)p_y(x,y)-v_y(x,y)q(x,y)-v(x,y)q_y(x,y)\,,$$

und die des Imaginärteils nach x ist

$$u_x(x,y)q(x,y)+u(x,y)q_x(x,y)+v_x(x,y)p(x,y)+v(x,y)p_x(x,y)\,;$$

hier zeigen die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen für f und g, daß beides entgegengesetzt gleich ist. Somit sind die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen für fg erfüllt. Damit ist fg differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}(fg)'(z) = {} & \big(u_x(x,y)p(x,y)+u(x,y)p_x(x,y)-v_x(x,y)q(x,y)-v(x,y)q_x(x,y)\big)\\ &+i\big(u_y(x,y)p(x,y)+u(x,y)p_y(x,y)-v_y(x,y)q(x,y)-v(x,y)q_y(x,y)\big)\,.\end{aligned}$$

Da entsprechend auch

$$f'(z) = u_x(x,y)+iv_x(x,y) \quad \text{und} \quad g'(z) = p_x(x,y)+iq_x(x,y)$$

ist, folgt

$$\begin{aligned}&f'(z)g(z)+f(z)g'(z)\\ &= \big(u_x(x,y)+iu_y(x,y)\big)\big(p(x,y)+iq(x,y)\big)+\big(p_x(x,y)+ip_y(x,y)\big)\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)\\ &= u_x(x,y)p(x,y)-u_y(x,y)q(x,y)\\ &\quad +i\big(u_x(x,y)q(x,y)+u_y(x,y)p(x,y)+p_x(x,y)v(x,y)+p_y(x,y)u(x,y)\big)\,.\end{aligned}$$

Wieder zeigen die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen, daß dies mit $(fg)'(z)$ übereinstimmt.

Die Verwendung der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen führt hier also zu einem erheblich aufwendigeren Beweis als der direkte Ansatz.

e) Warum wurde in der Vorlesung komplexe Differenzierbarkeit nur für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ erklärt, nicht aber auch für solche, in denen jeder Punkt ein Häufungspunkt ist?

Lösung: Bei einem Häufungspunkt ist nicht sichergestellt, daß wir uns sowohl in Richtung der reellen als auch in Richtung der komplexen Achse bewegen können.

f) Berechnen Sie die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:

$f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x,y,z) \mapsto x^3+y^3+z^3+3xyz \qquad f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \sin x \cos y$

$f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2} \qquad f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \arctan x + y$

Lösung:

$$\nabla f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+3yz \\ 3y^2+3xz \\ 3z^2+3xy \end{pmatrix}, \quad H_{f_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 3z & 3y \\ 3z & 6y & 3x \\ 3y & 3x & 6z \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_2(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix}, \quad H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2}+4x^2e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & 2e^{x^2+y^2}+4y^2e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_4(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+x^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_{f_4}(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g) Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

Lösung: Das ist natürlich gerade f_1 selbst.

h) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

Lösung: $f_1(1+h,j,k) = (1+h)^3 + j^3 + k^3 + 3(1+h)jk = 1+3h+3h^2+3jk+$ Terme vom Grad drei. Somit ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades gleich $1+3h+3h^2+3jk$. *Alternativ:* Wir kennen bereits Gradient und HESSE-Matrix von f_1; an der Stelle $(1,0,0)$ ist

$$\nabla f_1(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_{f_1}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades gleich

$$f_1(1,0,0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h\ j\ k) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix}$$
$$= 1 + 3h + \frac{6h^2+3jk+3kj}{2} = 1+3h+3h^2+3jk\,.$$

i) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

Lösung: $f_2(x,y) = \sin x \cos y$ hat als TAYLOR-Reihe natürlich das Produkt der TAYLOR-Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\,;$$

das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 ist daher x, denn alle sonstigen Terme des Produkts haben höheren Grad als zwei.
Genauso können wir bei $f_3(x,y) = e^{x^2+y^2}$ einfach $z = x^2+y^2$ in die TAYLOR-Reihe $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ einsetzen und alle Terme vom Grad größer zwei in x,y weglassen; das Ergebnis ist $1+x^2+y^2$.
Für $f_4(x) = \arctan x + y$ müssen wir einfach y zum TAYLOR-Polynom des Arkustangens addieren. Wegen

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

ergibt sich $x+y$ als TAYLOR-Polynom zweiten Grades.

j) Berechnen Sie die HESSE-Matrix der Funktion $g(x,y,z) = \sin(xy+yz+xz) + e^{2x+3y+5z}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
g_x(x,y,z) &= (y+z)\cos(xy+yz+xz) + 2e^{2x+3y+5z}\\
g_y(x,y,z) &= (x+z)\cos(xy+yz+xz) + 3e^{2x+3y+5z}\\
g_z(x,y,z) &= (x+y)\cos(xy+yz+xz) + 5e^{2x+3y+5z}\\
g_{xx}(x,y,z) &= -(y+z)^2\sin(xy+yz+xz) + 4e^{2x+3y+5z}\\
g_{xy}(x,y,z) &= -(x+z)(y+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 6e^{2x+3y+5z} = g_{yx}(x,y,z)\\
g_{xz}(x,y,z) &= -(x+y)(y+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 10e^{2x+3y+5z} = g_{yx}(x,y,z)\\
g_{yy}(x,y,z) &= -(x+z)^2\sin(xy+yz+xz) + 9e^{2x+3y+5z}\\
g_{yz}(x,y,z) &= -(x+y)(x+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 15e^{2x+3y+5z}s = g_{zy}(x,y,z)\\
g_{zz}(x,y,z) &= -(x+y)^2\sin(xy+yz+xz) + 25e^{2x+3y+5z}
\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$S = \sin(xy+yz+xz), \quad C = \cos(xy+yz+xz) \quad \text{und} \quad E = e^{3x+3y+5z}$$

ist somit $H_f(x,y,z) \;=$

$$\begin{pmatrix} -(y+x)^2S + 4E & -(x+z)(y+z)S + C + 6E & -(x+y)(y+z)S + C + 10E\\ -(x+z)(y+z)S + C + 6E & -(x+z)^2S + 9E & -(x+y)(x+z)S + C + 15E\\ -(x+y)(y+z)S + C + 10E & -(x+y)(x+z)S + C + 15E & -(x+y)^2S + 25E \end{pmatrix}.$$

k) Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ von

$$f(x,y) = e^x\sin y \quad \text{und} \quad g(x,y) = \cos(x-y)\sin(x+y)\,!$$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die TAYLOR-Reihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \cdots$$

sind (hoffentlich) wohlbekannt; multipliziert man sie miteinander und läßt alle Terme vom Grad größer drei weg, ergibt sich das gesuchte TAYLOR-Polynom zu

$$T_3(x,y) = y + xy + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6}\,.$$

Für das TAYLOR-Polynom von g gehen wir natürlich aus von den beiden TAYLOR-Reihen

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots \quad \text{und} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\;,$$

in die wir $x-y$ *bzw.* $x+y$ einsetzen müssen. Dabei hilft uns, daß in $(x\pm y)^n$ ausschließlich Monome vom Grad n vorkommen; wir müssen also nur Potenzen mit Exponent höchstens drei berücksichtigen. Das gesuchte TAYLOR-Polynom besteht also aus allen Termen vom Grad höchsten drei des Produkts

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{(x-y)^2}{2}\right)\left(x + y - \frac{(x+y)^3}{6}\right)\\
&= x + y - \frac{(x-y)^2(x+y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{6} + \frac{(x-y)^2(x+y)^3}{24}\,,
\end{aligned}$$

d.h. aus allen Summanden außer dem letzten, und ist somit

$$\begin{aligned}
T_3(x,y) &= x + y - \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{6}\\
&= x + y - \frac{x^3 - x^2y - xy^2 + y^3}{2} - \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{6}\\
&= x + y - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3\,.
\end{aligned}$$