WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11.-13. März 2015

a) Zeigen Sie sowohl durch direkte Anwendung der Definition als auch über die CAUCHY-RIEMANNschen Differentalgleichungen, daß die Funktion $f(z) = z^3$ komplex differenzierbar ist und daß $f'(z) = 3z^2$ ist!

b) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x$ komplex differenzierbar?

c) $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion auf $D \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Die beiden Bedingungen
- Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$, so daß $f(z + h) = f(z) + ch + o\big(|h|\big)$ und
- $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$ existiert

sind äquivalent.

d) Zeigen Sie, daß die LEIBNIZ-Regel für die Ableitung eines Produkts auch für komplex differenzierbare Funktionen gilt!

e) Warum wurde in der Vorlesung komplexe Differenzierbarkeit nur für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ erklärt, nicht aber auch für solche, in denen jeder Punkt ein Häufungspunkt ist?

f) Berechnen Sie die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:
$f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ $\qquad f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x, y) \mapsto \sin x \cos y$
$f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x, y) \mapsto \arctan x + y$

g) Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von f_1 um den Punkt $(0, 0, 0)$!

h) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1, 0, 0)$!

i) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

j) Berechnen Sie die HESSE-Matrix der Funktion $g(x, y, z) = \sin(xy + yz + xz) + e^{2x+3y+5z}$!

k) Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome vom Grad drei um den Punkt $(0, 0)$ von
$$f(x, y) = e^x \sin y \quad\text{und}\quad g(x, y) = \cos(x - y)\sin(x + y)\,!$$