Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4.-6. März 2015

a) In welchen Punkten läßt sich die Gleichung $x + \sin xy = y + \cos(x + y)$ nach y auflösen?

Lösung: Nach dem Satz über implizite Funktionen geht das in allen Punkten, in denen $x_0 + \sin x_0 y_0 = y_0 + \cos(x_0 + y)_0$ ist und außerdem die partielle Ableitung nach y der Differenz beider Seiten nicht verschwindet, d.h. $x_0 \cos x_0 y_0 \neq 1 - \sin(x_0 + y_0)$.

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Wann läßt sich die die Gleichung $y = f(x)$ in einer Umgebung des Punkts (x_0, y_0) nach x auflösen? Welche Ableitung hat die dabei erhaltene Funktion $x = g(y)$ in y_0 ?

Lösung: Die Gleichung $F(x, y) \underset{\text{def}}{=} f(x) - y$ läßt sich in (x_0, y_0) nach x auflösen, wenn $F(x_0, y_0) = 0$ ist, d.h. $y_0 = f(x_0)$, und wenn $F_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ nicht verschwindet. Die Ableitung der dann existierenden Funktion $g(y)$ ist

$$g'(y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} = \frac{1}{f'(x)}\,,$$

wie nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Analysis I auch nicht anders zu erwarten war.

c) Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36$!

Lösung: In jedem lokalen Extremum verschwindet der Gradient von f, also verschwinden

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 9y \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 3y^2 + 9x\,.$$

In solchen Punkten ist also $x^2 = -3y$ und $y^2 = -3x$. Somit ist in jedem dieser Punkte $x^4 = 9y^2 = -27x$, d.h. $x^4 + 27x = x(x^3 + 27)$ verschwindet. Das passiert für $x = 0$ und $x = -3$; wir müssen also diese beiden Fälle untersuchen.

Ist $x = 0$, so verschwindet auch y; wir befinden uns also im Nullpunkt. Da $f(x, 0) = x^3 - 36$ nahe null sowohl größere als auch kleinere Werte als $f(0, 0) = -36$ annimmt, haben wir hier weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

Für $x = -3$ ist auch $y = -3$ und

$$f(-3 + h, -3 + k) = -9 - 9(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3\,.$$

Da

$$h^2 - hk + k^2 = \left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geq 0$$

für alle (h, k) und da $h^3 + k^3$ schneller gegen Null geht als $h^2 - hk + k^2$, ist daher

$$f(-3 + h, -3 + k) = -9 - 9(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3 \geq -9$$

für alle (h, k) in einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunkts, d.h. f hat in $(-3, -3)$ ein lokales Maximum.

d) Am Ufer eines sehr langen und geraden Flusses soll ein rechteckförmiges Grundstück eingezäunt werden. Wie groß kann das Grundstück höchstens sein, wenn dazu hundert Meter Zaun zur Verfügung stehen und zur Flußseite hin nicht eingezäunt wird?

Lösung: Der Zaun parallel zum Fluß habe in Metern ausgedrückt die Länge y und befinde sich im Abstand x vom Fluß. Dann ist die Länge des Zauns $y + 2x = 100$, und die umzäunte Fläche ist $xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$. Die Ableitung dieses Funktion nach x ist

$100-4x$, das Maximum wird also erreicht bei $x=25$ und $y=50$. Die umzäunte Fläche ist $25\times 50=1250$ Quadratmeter.

e) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y)=xy$ auf der Kreislinie $x^2+y^2=1$!

Lösung: In diesen Punkten müssen die Gradienten von f und $g(x,y)=x^2+y^2-1$, also $\nabla f(x,y)=\binom{y}{x}$ und $\nabla g(x,y)=\binom{2x}{2y}$ linear abhängig sein, d.h. $2y^2=2x^2$ oder $y=\pm x$. Da die Punkte auf der Kreislinie liegen müssen, ist dann $x^2=y^2=\frac12$, also $x=\pm\frac12\sqrt2$ und $y=\pm\frac12\sqrt2$, Falls beide das gleiche Vorzeichen haben, ist $f(x,y)=\frac12$, bei verschiedenen Vorzeichen ist $f(x,y)=-\frac12$. Somit haben wir Maxima in den Punkten $(\frac12\sqrt2,\frac12\sqrt2)$ und $(-\frac12\sqrt2,-\frac12\sqrt2)$, Minima bei $(-\frac12\sqrt2,\frac12\sqrt2)$ und $(\frac12\sqrt2,-\frac12\sqrt2)$.

f) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y,z)=xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2=1$!

Lösung: Die Gradienten von f und $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ sind

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\nabla g(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}.$$

Der Gradient von g verschwindet nur im Nullpunkt, der nicht auf der Kugeloberfläche liegt; daher sind die beiden Gradienten genau dann linear abhängig, wenn es ein $\lambda\in\mathbb{R}$ gibt mit $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$, d.h.

$$yz=\lambda x,\quad xz=\lambda y\quad\text{und}\quad xy=\lambda z\,.$$

Da f verschwindet, wenn eine der Variablen null ist, sind in den Extrema alle Variablen ungleich null; wir können also nach λ auflösen und erhalten

$$\lambda=\frac{yz}{x}=\frac{xz}{y}=\frac{xy}{z}\quad\text{oder}\quad y^2z^2=x^2z^2=x^2y^2\,.$$

Da keine der Variablen verschwindet, folgt daraus, daß $x^2=y^2=z^2$ ist; in den Extrema haben also alle Variablen denselben Betrag. Da die Punkte auf der Kugeloberfläche liegen, ist dieser Betrag $\frac13\sqrt3$; wir bekommen die acht Punkte

$$\left(\pm\frac{\sqrt3}{3},\pm\frac{\sqrt3}{3},\pm\frac{\sqrt3}{3}\right).$$

Falls zwei oder kein Minuszeichen auftreten, ist der Funktionswert positiv, wir haben also Maxima, sonst Minima.

g) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x,y)=\cos^2x+\cos^2y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2\le1$!

Lösung: Falls das Maximum im Innern der Kreisscheibe angenommen wird, verschwindet dort der Gradient von f, d.h. $2\cos x\sin x=0$ und $2\cos y\sin y=0$. Somit muß $x=\frac12k\pi$ und $y=\frac12\ell\pi$ für $k,\ell\in\mathbb{Z}$. Da $x^2+y^2<1$ sein soll und $\frac12\pi>1$ ist, kommen nur $k=\ell=0$ in Frage, also $x=y=0$, und $f(0,0)=2$ ist offensichtlich der größte Wert den f annehmen kann.

h) Bestimmen Sie alle Punkte in der offenen Kreisscheibe $x^2+y^2<3/2$, in denen die Funktion $f(x,y)=\sin^2(x+y)+\cos^2(x-y)$ ihr absolutes Maximum annimmt!

Lösung:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2\sin(x+y)\cos(x+y)-2\cos(x-y)\sin(x-y)\\2\sin(x+y)\cos(x+y)+2\cos(x-y)\sin(x-y)\end{pmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn $\sin(x+y)\cos(x+y)=\sin(x-y)\cos(x-y)=0$ ist, d.h. $x\pm y$ müssen Vielfache von $\frac12\pi$ sein und damit x und y Vielfache von $\frac14\pi$. Für Punkte im Einheitskreis kommen nur 0 und $\pm\frac{1}{4}\pi$ in Frage. Falls eine der beiden Koordinaten verschwindet, nimmt $f(x,y)$ den Wert eins an, haben beide Betrag $\pm\frac{1}{4}\pi$ und sind gleich, erhalten wir den offensichtlich nicht überbietbaren Wert zwei, und bei verschiedenem Vorzeichen schließlich den Wert null. Das absolute Maximum wird also in den beiden Punkten $\pm(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ angenommen und der Funktionswert in diesem Punkten ist zwei.

i) Gibt es auch Punkte auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 3/2$, in denen dieser Wert angenommen wird?

Lösung: *Nein,* denn ist $f(x,y) = 2$, so muß $\cos(x-y) = \pm 1$ sein, x und y müssen sich also um ein ganzzahliges Vielfaches von π unterscheiden. Dies ist im Kreis mit Radius $\sqrt{3/2}$ nur möglich für $x = y$; dann ist $f(x,x) = \sin^2(2x) + 1$. Damit dies gleich zwei ist, müßte $2x$ ein halbzahliges Vielfaches von $\pi/4$ sein, aber für solche Punkte ist $2x^2 \neq 3/2$.

j) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$ geometrisch!

Lösung: Das ist eine Ellipse mit Halbachsen zwei und drei.

k) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ in M!

Lösung: $\nabla f(x,y) = \binom{2x}{2y-2}$ verschwindet im Punkt $(0,1)$; dort ist $f(0,1) = -1$. Da $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 \geq -1$ ist, liegt hier das absolute Minimum.

Nun betrachten wir den Rand der Ellipse. Der Gradient von $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$ ist $\binom{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y}$; da er auf dem Rand der Ellipse nirgends verschwindet, muß es in einem Extremum ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß

$$2x = \lambda \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad 2y - 2 = \lambda \cdot \frac{2y}{9}\,.$$

Wenn wir alle mit x *bzw.* y behafteten Terme auf eine Seite bringen, werden diese Gleichung zu

$$(4 - \lambda)x = 0 \quad \text{und} \quad (9 - \lambda)y = 9\,.$$

Für $x = 0$ gilt die erste Gleichung für alle λ. In diesem Fall ist $y = \pm 3$; die zweite Gleichung wird also zu $(9 - \lambda) \cdot (\pm 3) = 9$, was natürlich lösbar ist. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(0,3) = 3$ und $f(0,-3) = 15$.

Ist $x \neq 0$, muß $\lambda = 4$ sein; die zweite Gleichung wird dann zu $5y = 9$, d.h. $y = 9/5$ und damit $x = \pm 8/5$. Der Funktionswert ist in beiden Fällen $11/5$.

Da f stetig ist, muß f auf dem Ellipsenbogen sowohl sein Maximum als auch sein Minimum annehmen; damit ist klar, daß in $(0, \pm 3)$ Maxima und in $(\pm 8/5, 9/5)$ Minima liegen.

l) Ein Quader mit achsenparallelen Kanten liege ganz in der Menge

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Wie groß kann sein Volumen höchstens sein?

Lösung: Offensichtlich müssen die Ecken des Quaders auf dem Rand liegen; sonst könnte man ihn leicht vergrößern. Dann haben sie Koordinaten $(\pm x, \pm y, \pm z)$, die die Ellipsoidgleichung erfüllen, und das Volumen des Quaders ist $f(x,y,z) = 8xyz$. Wir müssen also diese Funktion maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Selbstverständlich verschwindet im Maximum keine der Koordinaten; sonst wäre das Volumen null.

Damit verschwindet auch keiner der Gradienten

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix} ;$$

für das Maximum gibt es also ein $\lambda \neq 0$, so daß

$$8yz = \frac{2\lambda x}{a^2}, \quad 8xz = \frac{2\lambda y}{b^2} \quad \text{und} \quad 8xy = \frac{2\lambda z}{c^2} .$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit x, die zweite mit y und die dritte mit z erhalten wir die Gleichungen

$$8xyz = 2\lambda\frac{x^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z^2}{c^2} ,$$

die wir noch durch 2λ dividieren können; auf Grund der Ellipsoidgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

folgt, daß

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

sein muß. Somit ist

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}b, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}c \quad \text{und} \quad 8xyz = \frac{8\sqrt{3}}{9}abc .$$

m) Ein Produkt werde aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 10 Euro kosten. Aus x Einheiten der ersten, y der zweiten und z der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten lassen sich für maximal 24 000 Euro fertigen?

Lösung: Offensichtlich sind nur positive Werte von x, y, z sinnvoll. Sowohl $f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ als auch $g(x) = 80x + 12y + 10z$ sind, wenn man zwei Variablen festhält, monoton wachsend in der dritten; daher ist im Optimum $g(x,y,z) = 24\,000$.
Die Gradienten von f und $g - 24\,000$ sind

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 20x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} \\ 10x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}} \\ 10x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{-\frac{4}{5}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} ;$$

da beide nicht verschwinden, muß es im Maximum ein λ geben mit

$$\begin{aligned} 20x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} &= 80\lambda \\ 10x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}} &= 12\lambda \\ 10x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{-\frac{4}{5}} &= 10\lambda . \end{aligned}$$

oder, gekürzt auf rechte Seiten 12λ,

$$\begin{aligned} 3x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} &= 12\lambda \\ 10x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}} &= 12\lambda \\ 12x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{-\frac{4}{5}} &= 12\lambda . \end{aligned}$$

Somit ist $3x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} = 10x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}} = 12x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{-\frac{4}{5}}$. Multiplikation mit $x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{4}{5}}z^{\frac{4}{5}}$ macht daraus die Gleichung

$$3yz = 10xz = 12xy, \quad \text{d.h.} \quad 3y = 10x, \quad 10z = 12y \quad \text{und} \quad 3z = 12x .$$

Drücken wir alle drei Variablen durch x aus, ist also $z = 4x$ und $y = 10x/3$, also

$$g(x,y,z) = 80x + 40x + 40x = 160x ,$$

was für $x = 150$ gleich 24 000 wird. Im Maximum ist also

$$x = 150, \quad y = 500 \quad \text{und} \quad z = 600 .$$

Mit diesen Werten ist

$$f(x,y,z) = 50 \cdot 150^{2/5} \cdot 500^{1/5} \cdot 600^{1/5} = 50 \cdot \sqrt[5]{150^2 \cdot 500 \cdot 600} \approx 4622{,}0087\,.$$

Somit lassen sich maximal 4622 Einheiten herstellen.

n) Ab welchem Preis, der für eine produzierte Einheit erzielt werden kann, lohnt sich eine Erhöhung des Kapitaleinsatzes?

Lösung: Dazu müssen wir λ berechnen, z.B. aus der Gleichung

$$12\lambda = 3x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} = 3 \cdot 150^{-\frac{3}{5}} \cdot 500^{\frac{1}{5}} \cdot 600^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}8488\,,$$

d.h. $\lambda \approx 0{,}154$. Bei einem um h erhöhten Kapitaleinsatz lassen sich etwa λh zusätzliche Einheiten fertigen; das lohnt sich, sobald der erzielbare Preis höher ist als $1/\lambda \approx 6{,}49$ Euro.

o) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, und (x_0, y_0) sei ein Punkt, in dem $F(x_0, y_0)$ verschwindet, aber $\nabla F(x_0, y_0)$ nicht der Nullvektor ist. Zeigen Sie, daß die Tangente in (x_0, y_0) an die Kurve

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; F(x,y) = 0\right\}$$

die durch

$$F_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

definierte Gerade ist!

Lösung: Nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \nabla F(x_0, y_0) \right\rangle + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \right)\,.$$

Falls $(x_0 + h, y_0 + k)$ auf der durch $F(x,y) = 0$ definierten Kurve liegt, verschwinden sowohl $F(x_0, y_0)$ als auch $F(x_0 + h, y_0 + k)$, also geht das Skalarprodukt von $\binom{h}{k}$ mit $\nabla F(x_0, y_0)$ schneller gegen Null als die Norm von $\binom{h}{k}$. Die Punkte $(x_0 + h, y_0 + k)$, für die dieses Skalarprodukt verschwindet, liegen somit auf einer Geraden, die die Kurve in (x_0, y_0) berührt, also auf der Tangenten. Mit $h = x - x_0$ und $k = y - y_0$ ergibt sich die behauptete Gleichung.

p) $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen, und (x_0, y_0) sei ein Punkt, in dem sowohl F als auch G verschwinden, nicht aber ∇F und ∇G. Zeigen Sie, daß sich die Kurven

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; F(x,y) = 0\right\} \quad \text{und} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; G(x,y) = 0\right\}$$

im Punkt (x_0, y_0) genau dann berühren, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$\nabla F(x_0, y_0) = \lambda \nabla G(x_0, y_0)\,.$$

Lösung: Nach der vorigen Aufgabe liegen auf der Tangenten an C im Punkt (x_0, y_0) genau die Punkte (x, y), für die der Vektor $\binom{x - x_0}{y - y_0}$ senkrecht auf dem Gradienten von F in (x_0, y_0) steht; auf der Tangente an D liegen entsprechend die, für die dieser Vektor senkrecht auf dem Gradienten von G steht. Die beiden Geraden stimmen genau dann überein, wenn die beiden Gradienten proportional sind, und da nach Voraussetzung keiner der beiden der Gradienten proportional sind, und da nach Voraussetzung keiner der beiden der Nullvektor ist, kann man jeden der beiden als Vielfaches des anderen schreiben.