WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25.-27. Februar 2015

a) Zeigen Sie: Für $h \to 0$ ist $\cos h - 1 = o(h)$!

Lösung: Nach der Regel von DE L'HÔPITAL und wegen der Stetigkeit der Sinusfunktion ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{1} = -\sin 0 = 0\,.$$

b) *Richtig oder falsch:* Für ein Polynom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \to 0$.

Lösung: *Falsch:* Ist f nicht das Nullpolynom, sondern $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit mindestens einem $a_i \neq 0$, so wächst der Betrag von

$$\frac{f}{x^{n+1}} = \frac{a_n}{x} + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^n} + \frac{a_0}{x^{n+1}}$$

für $x \to 0$ über alle Grenzen, geht also ganz sicher nicht gegen 0.

c) *Richtig oder falsch:* Für ein Polynom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \to \infty$.

Lösung: *Richtig:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{x^{n+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{x} + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^n} + \frac{a_0}{x^{n+1}} = 0\,.$$

d) *Richtig oder falsch:* $\log x = o(x)$ für $x \to 0$.

Lösung: *Falsch,* denn $\lim\limits_{x\searrow 0} \log x = -\infty$, nicht Null.

e) *Richtig oder falsch:* $\log x = o(x)$ für $x \to \infty$.

Lösung: *Richtig:* Nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

f) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, so auch $\sqrt{f}$.

Lösung: *Richtig:* Wir wissen aus der Analysis I, daß die Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, die jeder nichtnegativen Zahl deren Quadratwurzel zuordnet, stetig, und die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist stetig.

g) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar, so auch $\sqrt{f}$.

Lösung: *Falsch:* Ist etwa $f(x,y) = x^2$, so ist $\sqrt{f(x)} = |x|$, und diese Funktion ist für $x = 0$ nicht differenzierrbar.

h) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = (x, x^2, \sin x)$!

Lösung: Die Zeilen der JACOBI-Matrix sind die Ableitungen der drei Komponentenfunktionen, d.h.

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ \cos x \end{pmatrix} .$$

i) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$:
$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) = xyz$, $h(x,y,z) = e^{f(x,y,z)}$, $k(x,y,z) = \cos g(x,y,z)$!

Lösung: Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen:

$$\begin{array}{rrr} f_x(x,y,z) = 2x, & f_y(x,y,z) = 2y, & f_z(x,y,z) = 2z \\ g_x(x,y,z) = yz, & g_y(x,y,z) = xz, & g_z(x,y,z) = xy \\ h_x(x,y,z) = 2xe^{x^2+y^2+z^2}, & h_y(x,y,z) = 2ye^{x^2+y^2+z^2}, & h_z(x,y,z) = 2ze^{x^2+y^2+z^2}, \\ k_x(x,y,z) = -yz\sin(xyz), & k_x(x,y,z) = -xz\sin(xyz), & k_x(x,y,z) = -xy\sin(xyz) \end{array}$$

Somit ist

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix},$$
$$\nabla h(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}\nabla f(x,y,z) \quad \text{und} \quad \nabla k(x,y,z) = -\sin(xyz)\nabla g(x,y,z).$$

j) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \big(\cos(2x+3y^2),\ \sin(4x^2+5y)\big) \end{cases}$$

Lösung: Die erste Komponente $\cos(2x+3y^2)$ hat $-2\sin(2x+3y^2)$ als partielle Ableitung nach x und $-6y\sin(2x+3y^2)$ als partielle Ableitung nach y; für die zweite Komponente erhalten wir entsprechend $8x\cos(4x^2+5y)$ und $5\cos(4x^2+5y)$. Somit ist

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin(2x+3y^2) & -6y\sin(2x+3y^2) \\ 8x\cos(4x^2+5y) & 5\cos(4x^2+5y) \end{pmatrix} .$$

k) Bestimmen Sie die JACOBI-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (y_1,\dots,y_m) \quad \text{mit} \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_j \end{cases}$$

im Punkt $(x_1,\dots,x_n)$!

Lösung: Die partielle Ableitung von $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_j$ nach x_k ist a_{ik}, also ist

$$J_f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

l) Auf welcher (größtmöglichen) Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(\sin\frac{x^2+y^2}{x}, \cos\frac{x^4-y^4}{y}\right)$$

definiert? Ist D offen?

Lösung: Die einzigen Probleme sind die Nenner; sobald x oder y verschwindet, ist $f(x,y)$ nicht definiert. Somit ist

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \neq 0\right\}.$$

Diese Menge ist offen, denn nehmen wir zu $(x,y) \in D$ als ε das Minimum von $|x|$ und $|y|$, so liegen (sowohl bezüglich der EUKLIDischen Metrik als auch der zur Maximumsnorm) alle Punkte des $\mathbb{R}^2$, deren Abstand von (x,y) kleiner als ε ist, in D.

m) Zeigen Sie durch schrittweise Anwendung der Lemmata der Vorlesung, daß f auf ganz D stetig ist!

Lösung: Wir wissen aus der Analysis I, daß die Funktionen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$, $y \mapsto y^2$ und $y \mapsto y^4$ stetig sind. Da, wie wir in der ersten Aufgabe auf diesem Blatt gesehen haben, auch die Projektion $(x,y) \mapsto x$ stetig ist und entsprechend natürlich auch $(x,y) \mapsto y$, sind somit auch die Abbildungen

$$(x,y) \mapsto x^2, \quad (x,y) \mapsto y^2, \quad (x,y) \mapsto x^4 \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto y^4$$

stetig als Hintereinanderausführungen. Schachtelung mit der Addition *bwz.* Subtraktion zeigt die Stetigkeit von

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto x^4 - y^4 .$$

Da für $(x,y) \in D$ weder x noch y verschwindet und die Division durch Nenner ungleich Null stetig ist, sind auf D auch die Funktionen

$$(x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x} \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto \frac{x^4-y^4}{y}$$

stetig, und damit auch ihre Schachtelungen mit Sinus und Kosinus, d.h. die Funktionen

$$(x,y) \mapsto \sin\frac{x^2+y^2}{x} \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto \cos\frac{x^4-y^4}{y} .$$

Da eine Funktion nach $\mathbb{R}^2$ genau dann stetig ist, wenn ihre Komponenten stetig sind, folgt die Stetigkeit von f auf D.

n) In welchen Punkten von D ist f differenzierbar? Bestimmen Sie dort jeweils die JACOBI-Matrix von f!

Lösung: Auch hierkönnen wir die beiden Komponenten einzeln betrachten und ihre partiellen Ableitungen berechnen; wir beachten dabei, daß

$$\frac{x^2+y^2}{x} = x + \frac{y^2}{x} \quad \text{und} \quad \frac{x^4-y^4}{y} = \frac{x^4}{y} - y^3$$

ist. Daher ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\sin\frac{x^2+y^2}{x} &= \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)\cos\frac{x^2+y^2}{x} = \frac{x^2-y^2}{x^2}\cos\frac{x^2+y^2}{x}\\
\frac{\partial}{\partial y}\sin\frac{x^2+y^2}{x} &= \frac{2y}{x}\cos\frac{x^2+y^2}{x}\\
\frac{\partial}{\partial x}\cos\frac{x^4-y^4}{y} &= -\frac{4x^3}{y}\sin\frac{x^4-y^4}{y}\\
\frac{\partial}{\partial y}\cos\frac{x^4-y^4}{y} &= -\left(-\frac{x^4}{y^2}-3y^2\right)\sin\frac{x^4-y^4}{y} = \frac{x^4+3y^4}{y^2}\sin\frac{x^4-y^4}{y}
\end{aligned}$$

und

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-y^2}{x^2}\cos\dfrac{x^2+y^2}{x} & \dfrac{2y}{x}\cos\dfrac{x^2+y^2}{x} \\ -\dfrac{4x^3}{y}\sin\dfrac{x^4-y^4}{y} & \dfrac{x^4+3y^4}{y^2}\sin\dfrac{x^4-y^4}{y} \end{pmatrix} .$$

o) Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Lösung: *Nein,* denn weder für

$$\frac{x^2+y^2}{x} = x + \frac{y^2}{x} \quad \text{noch für} \quad \frac{x^4-y^4}{y} = \frac{x^4}{y} - y^3$$

existiert ein entsprechender Limes: Beispielsweise erhalten wir auf der Parabel $y^2 = ax$ für den ersten Ausdruck den Wert $x + a$, der gegen a geht, und für den zweiten auf der Kurve $y = cx^4$ den Wert $c - y^3$, der gegen c geht.

p) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$\nabla F\big(f(x), g(y)\big) = \begin{pmatrix} F_x\big(f(x), g(y)\big) \cdot f'(x) \\ F_y\big(f(x), g(y)\big) \cdot g'(y) \end{pmatrix} !$$

Lösung: Die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto \big(f(x), g(y)\big)$ ist differenzierbar mit JACOBI-Matrix $J(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ 0 & g'(y) \end{pmatrix}$; die JACOBI-Matrix von F ist natürlich

$$J_F(x,y) = \big(F_x(x,y), F_y(x,y)\big) .$$

Nach der Kettenregel ist die JACOBI-Matrix der zusammengesetzten Funktion

$$J_F(x,y) \cdot J(x,y) = \Big(F_x\big(f(x), g(y)\big) \cdot f'(x), F_y\big(f(x), g(y)\big) \cdot g'(y)\Big) ,$$

der Gradient also der zugehörige Spaltenvektor.

q) Was ist $\nabla F\big(f(x) + g(y), f(x) - g(y)\big)$?

Lösung: Hier müssen wir entsprechend die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(x,y) \mapsto \big(f(x) + g(y), f(x) - g(y)\big)$$

betrachten; ihre JACOBI-Matrix ist $J(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x) & g'(y) \\ f'(x) & -g'(y) \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{aligned} J_F(x,y) \cdot J(x,y) = \Big(&F_x\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot f'(x) + F_y\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot f'(x), \\ &F_x\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot g'(y) - F_y\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot g'(y)\Big) , \end{aligned}$$

also

$$\nabla F\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \\ = \begin{pmatrix} F_x\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot f'(x) + F_y\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot f'(x) \\ F_x\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot g'(y) - F_y\big(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\big) \cdot g'(y) \end{pmatrix}$$

r) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^5}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig? differenzierbar? stetig differenzierbar?

Lösung: Natürlich ist die Funktion in allen Punkten ungleich $(0,0)$ stetig, denn dort ist sie einfach ein Quotient zweier Polynome, und der Nenner verschwindet nicht. Zum Nachweis der Stetigkeit im Nullpunkt müssen wegen wir $f(0,0) = 0$ zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x,y)| < \varepsilon$ ist, falls $|x|$ und $|y|$ kleiner δ sind. Für $x = 0$ ist $f(0,y) = 0$ für alle y; diese Punkte sind also problemlos.
Für $y \neq 0$ ist

$$|f(x,y)| = \left|\frac{(xy)^5}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3y^5}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| \leq \left|x^3y^5\right| .$$

Setzen wir $\delta = \sqrt[8]{\varepsilon}$, ist dies kleiner $\delta^8 = \varepsilon$, wenn sowohl $|x| < \delta$ als auch $|y| < \delta$ ist.

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$f_x(x, y) = \frac{5(x^2 + y^2)x^4y^5 - 2x^6y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^6y^5 + 5x^4y^7}{(x^2 + y^2)^2} \,;$$

für $(x, y) = (0, 0)$ ist

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \,.$$

Völlig analog zum Beweis der Stetigkeit kann man zeigen, daß auch

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_x(x, y) = 0$$

ist, und fast wörtlich das gleiche Argument zeigt auch, daß

$$f_y(0, 0) = 0 = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f_y(x, y)$$

ist. Somit ist f stetig differenzierbar mit

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{3x^6y^5 + 5x^4y^7}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{5x^7y^4 + 3x^5y^6}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad \text{falls } (x, y) \neq (0, 0)$$

und $\nabla f(0, 0)$ ist der Nullvektor.