Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25.-27. Februar 2015

a) Zeigen Sie: Für $h \to 0$ ist $\cos h - 1 = o(h)$!

b) *Richtig oder falsch:* Für ein Polynom $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \to 0$.

c) *Richtig oder falsch:* Für ein Polynom $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \to \infty$.

d) *Richtig oder falsch:* $\log x = o(x)$ für $x \to 0$.

e) *Richtig oder falsch:* $\log x = o(x)$ für $x \to \infty$.

f) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, so auch $\sqrt{f}$.

g) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar, so auch $\sqrt{f}$.

h) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = (x, x^2, \sin x)$!

i) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x,y,z) = xyz$, $h(x,y,z) = e^{f(x,y,z)}$, $k(x,y,z) = \cos g(x,y,z)$!

j) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \big(\cos(2x+3y^2),\ \sin(4x^2+5y)\big) \end{cases}$$

k) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m) \quad \text{mit} \quad y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j \end{cases}$$

im Punkt $(x_1, \dots, x_n)$!

l) Auf welcher (größtmöglichen) Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(\sin \frac{x^2+y^2}{x}, \cos \frac{x^4-y^4}{y}\right)$$

definiert? Ist D offen?

m) Zeigen Sie durch schrittweise Anwendung der Lemmata der Vorlesung, daß f auf ganz D stetig ist!

n) In welchen Punkten von D ist f differenzierbar? Bestimmen Sie dort jeweils die Jacobi-Matrix von f !

o) Existiert $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

p) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$\nabla F\big(f(x), g(y)\big) = \begin{pmatrix} F_x\big(f(x), g(y)\big) \cdot f'(x) \\ F_y\big(f(x), g(y)\big) \cdot g'(y) \end{pmatrix} !$$

q) Was ist $\nabla F\big(f(x) + g(y), f(x) - g(y)\big)$?

r) Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^5}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig? differenzierbar? stetig differenzierbar?