WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18.-20. Februar 2015

a) X und Y seien metrische Räume mit Metriken d_X und d_Y. Welche der folgenden Vorschriften definiert eine Metrik auf $X \times Y$?

$$\begin{aligned} d_1\big((x,y),\,(u,v)\big) &= \max\big(d_X(x,u),\; d_Y(y,v)\big) \\ d_2\big((x,y),\,(u,v)\big) &= \min\big(d_X(x,u),\; d_Y(y,v)\big) \\ d_3\big((x,y),\,(u,v)\big) &= d_X(x,u) + d_Y(y,v) \end{aligned}$$

Lösung: Die Symmetrie folgt in allen drei Fällen direkt aus der von d_X und d_Y.

Da d_X und d_Y nur Werte größer oder gleich Null annehmen, gilt dasselbe auch für alle drei Kandidaten. Die Bedingung, daß der Wert genau dann gleich Null ist, wenn es um den Abstand eines Punkts von sich selbst geht, gilt allerdings nicht für d_2: Für beliebige $x, u \in X$ ist

$$d\big((x,y),\,(u,y)\big) = \min\big(d_X(x,u),\; d_Y(y,y)\big) = \min\big(d_X(x,u),\; 0\big) = 0\,,$$

ohne daß $x = y$ sein muß. In den anderen beiden Fällen kann $d_i\big((x,y),\,(u,v)\big)$ nur verschwinden, wenn $d_X(x,u)$ und $d_Y(y,v)$ beide verschwinden, so daß hier die Bedingung erfüllt ist.

Auch die Dreiecksungleichung ist in diesen beiden Fällen erfüllt: Für drei Punkte (x,y), (u,v) und (w,z) ist

$$d_1\big((x,y),\,(w,z)\big) = \max\big(d_X(x,w),\; d_Y(y,z)\big)\,.$$

Dabei ist

$$d_X(x,w) \le d_X(x,u) + d_X(u,w) \quad \text{und} \quad d_Y(y,z) \le d_Y(y,v) + d_Y(v,z)$$

und

$$\begin{aligned} &d_1\big((x,y),\,(u,v)\big) + d_1\big((u,v),\,(w,z)\big) \\ &= \max\big(d_X(x,u),\; d_Y(y,v)\big) + \max\big(d_X(u,w),\; d_Y(v,z)\big) \\ &\ge \max\big(d_X(x,u) + d_X(u,v), d_Y(y,v) + d_Y(v,z)\big) \\ &\ge \max\big(d_X(x,w), d_Y(y,z)\big) = d_1\big((x,y),\,(w,z)\big) \end{aligned}$$

nach den Dreiecksungleichungen für d_X und d_Y.

Einfacher ist es bei d_3:

$$\begin{aligned} d_3\big((x,y),\,(w,z)\big) &= d_X(x,w) + d_Y(y,z) \le d_X(x,u) + d_X(u,w) + d_Y(y,v) + d_Y(v,z) \\ &= d_3\big((x,y),\,(u,v)\big) + d_3\big((u,v),\,(w,z)\big) \end{aligned}$$

b) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned} &\|(x,y)\|_1 = x^2 + y^2, \qquad \|(x,y)\|_2 = |x+y|\,, \qquad \|(x,y)\|_3 = |x| + |y| \\ &\|(x,y)\|_4 = \max(x,y), \qquad \|(x,y)\|_5 = \max(2\,|x|\,, |3y|), \qquad \|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|} \end{aligned}$$

Lösung: $\|(x,y)\|_1 = x^2 + y^2$ definiert keine Norm, denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\|\lambda(x,y)\|_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \lambda^2(x^2+y^2) = \lambda^2(x^2+y^2) = \lambda^2\,\|(x,y)\|_1\,,$$

was für $\lambda \ne 0, 1$ nicht mit $|\lambda|\,\|(x,y)\|_1$ übereinstimmt.

Auch $\|(x,y)\|_2 = |x+y|$ definiert keine Norm, denn beispielsweise ist $\|(1,-1)\|_2 = 0$, obwohl $(1,-1)$ nicht der Nullpunkt ist.

$\|(x,y)\|_3 = |x| + |y|$ ist eine Norm:

$$\|\lambda(x,y)\|_3 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_3 = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda| \big(|x| + |y|\big) = |\lambda| \, \|(x,y)\|_3 \ ,$$

die Summe zweier Beträge ist nie negativ und verschwindet genau dann, wenn $x = y = 0$ ist, und für $(u,v),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned} \|(u,v)+(x,y)\|_3 &= \|(u+x, v+y)\|_3 = |u+x| + |v+y| \\ &\le |u| + |x| + |v| + |y| = \|(u,v)\|_3 + \|(x,y)\|_3 \ . \end{aligned}$$

$\|(x,y)\|_4 = \max(x,y)$ ist keine Norm, da z.B. $\|(-1,-2)\|_4 = -1$ negativ ist.

$\|(x,y)\|_5 = \max(2\,|x|\,,|3y|)$ ist wieder eine Norm, denn

$$\|\lambda(x,y)\|_5 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_5 = \max\{2\,|\lambda x|\,, |3\lambda y|\} = |\lambda| \max\{2\,|x|\,, |3y|\} = |\lambda| \, \|(x,y)\|_5 \ ,$$

das Maximum zweier Beträge ist nie negativ und verschwindet genau dann, wenn x und y beide verschwinden, und für $(u,v),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ schließlich ist

$$\begin{aligned} \|(u,v)+(x,y)\|_5 &= \|(u+x, v+y)\|_5 = \max\{2\,|u+x|\,, |3v+3y|\} \\ &\le \max\{2(|u|+|x|), |3v| + |3y|\} = \|(u,v)\|_5 + \|(x,y)\|_5 \ . \end{aligned}$$

$\|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$ schließlich ist keine Norm, da beispielsweise $\|(1,0)\|_6$ verschwindet.

c) Zeigen Sie, daß die Normen unter diesen Abbildungen äquivalent zur Maximumsnorm sind!

Lösung: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} &\max\{|x|\,,|y|\} \le \|(x,y)\|_3 = |x| + |y| \le 2\max\{|x|\,,|y|\} \quad \text{und} \\ &\max\{|x|\,,|y|\} \le \|(x,y)\|_5 = \max\{2\,|x|\,,|3y|\} \le 3\max\{|x|\,,|y|\}\,. \end{aligned}$$

d) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen?

$$M_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 < x,y < 2\big\}, \qquad M_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x,y \le 2\big\},$$
$$M_3 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 < x,y \le 2\big\},$$
$$M_4 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| xy = 0\big\}, \qquad M_5 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| xy \ne 0\big\},$$

Lösung: Geometrisch betrachten sind M_1 bis M_3 Quadrate mit Ecken $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ und $(2,0)$; im Falle von M_1 gehört keine der vier Kanten zur Menge, bei M_2 alle Kanten, und bei M_3 die Kanten von $(0,2)$ nach $(2,2)$ und $(2,0)$ nach $(2,2)$, wobei allerdings jeweils der erste Eckpunkt nicht in M_2 liegt.

M_1 ist offen, denn bezeichnet ε für einen Punkt $(x,y) \in M_1$ das Minimum der vier Zahlen $x, y, 2-x$ und $2-y$, so liegt die offene Kreisscheibe mit Radius ε um (x,y) ganz in M_1. Da der Randpunkt $(0,0)$ nicht in M_1 liegt, ist M_1 jedoch nicht abgeschlossen.

M_2 ist nicht offen, da $(0,0) \in M_2$ kein innerer Punkt ist, aber abgeschlossen, da alle Randpunkte in M_2 liegen.

M_3 ist nicht offen, da $(2,2) \in M_3$ kein innerer Punkt ist, und nicht abgeschlossen, da der Randpunkt $(0,0)$ nicht in M_3 liegt.

M_4 ist abgeschlossen, denn offensichtlich sind die Randpunkte genau die Punkte von M_4. Da es keine inneren Punkte gibt, ist M_4 nicht offen.

M_5 ist offen, denn bezeichnet ε für $(x,y) \in M_5$ das Minimum der Beträge von x und y, so liegt die offene Kreisscheibe mit Radius ε um (x,y) ganz in M_5. Randpunkte von M_5 sind die Punkte aus dem Komplement M_4, also ist M_5 nicht abgeschlossen.

e) Zeigen Sie, daß die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ wieder offen ist!

Lösung: I sei eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir müssen zeigen, daß auch $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen ist. Jeder Punkt $x \in U$ liegt in mindestens einem U_i und ist dort innerer Punkt; U_i enthält also für ein gewisses $\varepsilon > 0$ alle Punkte $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Damit liegen diese Punkte erst recht in U, also ist auch U offen.

f) Stellen Sie das offene Intervall $(0, 1)$ dar als Vereinigung abzählbar unendlich vieler abgeschlossener Intervalle!

Lösung: $(0, 1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [1/n,\ 1 - 1/n]$

g) Welche der Punkte $(0,0), (1,1), (2,2), (2,1), (2,0)$ aus $\mathbb{R}^2$ sind innere Punkte der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 2\}$, welche sind äußere *bzw.* Randpunkte?

Lösung: M ist eine Raute mit Eckpunkten $(\pm 2, 0)$ und $(0, \pm 2)$. Daher ist $(0,0)$ ein innerer Punkt, denn der Kreis mit Radius eins um $(0,0)$ liegt ganz in M. Der Punkt $(1,1)$ liegt auf der Kante von $(0,2)$ nach $(2,0)$, ist also Randpunkt: Für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ist $(1 - \varepsilon, 1) \in M$, aber $(1 + \varepsilon, 1) \notin M$.

$(2,2)$ ist ein äußerer Punkt: Der Kreis mit Radius eins um $(2,2)$ liegt vollständig außerhalb von M, entsprechend auch $(2,1)$, wo immerhin noch der Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ ganz außerhalb liegt. $(2,0)$ als Ecke schließlich ist Randpunkt: $(2 - \varepsilon, 0)$ liegt für kleine ε in M, $(2 + \varepsilon, 0)$ nicht.

h) Welche der hier definierten Folgen sind konvergent, und wohin konvergieren diese?

$$(u_n, v_n) = \left(\frac{1}{n^2+1}, \frac{2}{n^3-3}\right), \quad (x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right), \quad (w_n, z_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$$

Lösung: Wenn wir mit der Maximumsnorm arbeiten, müssen wir einfach untersuchen, ob die Folgen in der ersten sowie der zweiten Komponente konvergieren. Mit dem, was wir aus der Analysis I wissen, ist das einfach zu entscheiden:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n, \lim_{n\to\infty} v_n\right) = (0,0)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (w_n, z_n) = \left(\lim_{n\to\infty} w_n, \lim_{n\to\infty} z_n\right) = (0,1)\,.$$

Da die Folge der x_n unbestimmt divergiert, kann auch die Folge der Punkte (x_n, y_n) nicht konvergieren.

i) Zeigen Sie direkt (d.h. nur unter Verwendung der Stetigkeitsdefinition), daß die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$ stetig ist!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist. Dort ist $f(x_0, y_0) = x_0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für die Maximumsnorm (oder auch die EUKLIDische Norm) auf $\mathbb{R}^2$: Ist $\|(u,v) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon$, so ist insbesondere $|u - x_0| < \varepsilon$; die Bedingung aus der Stetigkeitsdefinition ist also erfüllt für $\delta = \varepsilon$.

j) *Richtig oder falsch:* $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

Lösung: *Falsch:* Sei etwa D die einelementige Menge, die nur aus dem Nullpunkt besteht. Dann ist der Nullpunkt natürlich kein Häufungspunkt von D, aber die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = (0, \ldots, 0)$ für alle k konvergiert gegen den Nullpunkt.

k) *Richtig oder falsch:* $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

Lösung: *Richtig:* Falls es eine solche Folge gibt, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|x - x_k\| < \varepsilon$ für alle $k \ge N_0$. Da alle x_k in D liegen und paarweise verschieden sind, liegen die unendlich vielen x_k mit $k \ge N_0$ allesamt in D und $\|x - x_k\| < \varepsilon$.

Ist umgekehrt x ein Häufungspunkt von D, so gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in D$ mit $x_k \neq x$ und $\|x - x_k\| < 1/k$. (Es gibt sogar unendlich viele.) Selbstverständlich konvergiert diese Folge gegen x; die x_k müssen allerdings nicht paarweise verschieden sein.

Unter den x_k muß es aber unendlich viele verschiedene Punkte geben, denn sonst gäbe es nur endlich viele Abstände $\|x - x_k\|$ und damit insbesondere einen minimalen. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß $\|x - x_k\| < 1/k$ ist.

Streichen wir aus der Folge der x_k alle Punkte, die bereits an einer früheren Stelle vorkamen, erhalten wir eine neue Folge aus paarweise verschiedenen Punkten, und auch die konvergiert gegen x.