Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18.-20. Februar 2015

a) X und Y seien metrische Räume mit Metriken d_X und d_Y. Welche der folgenden Vorschriften definiert eine Metrik auf $X \times Y$?

$$d_1\big((x,y),\,(u,v)\big) = \max\big(d_X(x,u),\,d_Y(y,v)\big)$$
$$d_2\big((x,y),\,(u,v)\big) = \min\big(d_X(x,u),\,d_Y(y,v)\big)$$
$$d_3\big((x,y),\,(u,v)\big) = d_X(x,u) + d_Y(y,v)$$

b) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{R}^2$?

$$\|(x,y)\|_1 = x^2 + y^2, \qquad \|(x,y)\|_2 = |x+y|\,, \qquad \|(x,y)\|_3 = |x| + |y|$$
$$\|(x,y)\|_4 = \max(x,y), \qquad \|(x,y)\|_5 = \max(2\,|x|\,,|3y|), \qquad \|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$$

c) Zeigen Sie, daß die Normen unter diesen Abbildungen äquivalent zur Maximumsnorm sind!

d) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen?

$$M_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 < x,y < 2\big\}, \qquad M_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 \le x,y \le 2\big\},$$
$$M_3 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 < x,y \le 2\big\},$$
$$M_4 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; xy = 0\big\}, \qquad M_5 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; xy \ne 0\big\},$$

e) Zeigen Sie, daß die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ wieder offen ist!

f) Stellen Sie das offene Intervall $(0,\,1)$ dar als Vereinigung abzählbar unendlich vieler abgeschlossener Intervalle!

g) Welche der Punkte $(0,0), (1,1), (2,2), (2,1), (2,0)$ aus $\mathbb{R}^2$ sind innere Punkte der Menge $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| + |y| \le 2\big\}$, welche sind äußere *bzw.* Randpunkte?

h) Welche der hier definierten Folgen sind konvergent, und wohin konvergieren diese?

$$(u_n, v_n) = \left(\frac{1}{n^2+1}, \frac{2}{n^3-3}\right), \quad (x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right), \quad (w_n, z_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$$

i) Zeigen Sie direkt (d.h. nur unter Verwendung der Stetigkeitsdefinition), daß die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$ stetig ist!

j) *Richtig oder falsch:* $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

k) *Richtig oder falsch:* $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.