Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11–13. Februar 2015

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration:

$$\int \sin^2 x\,dx,\quad \int \cos^2 x\,dx,\quad \int e^x \cos 3x\,dx,\quad \int xe^{-x^2}\,dx,\quad \int x^3e^{-x^2}\,dx,\quad \int x\log x\,dx$$

Lösung: Die Regel zur partiellen Integration sagt, daß

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx\,.$$

Mit $u(x) = \sin x$ und $v(x) = -\cos x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx\\ &= -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx\,,\end{aligned}$$

also ist

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x \quad\text{und}\quad \int \sin^2 x = \frac{x-\sin x\cos x}{2} + C\,.$$

Entsprechend ist

$$\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx = \sin x\cos x + \frac{x-\sin x\cos x}{2} + C = \frac{x+\sin x\cos x}{2} + C\,.$$

Beim nächsten Integral erhalten wir mit $u(x) = \cos 3x$ und $v(x) = e^x$

$$\int e^x\cos 3x\,dx = e^x\cos 3x + 3\int e^x \sin 3x\,dx\,;$$

wenden wir die Regel noch einmal an mit $u(x) = \sin 3x$ folgt

$$\int e^x\sin 3x = e^x\sin 3x - 3\int e^x\cos 3x\,dx\,;$$

daher ist

$$\int e^x\cos 3x\,dx = e^x(\cos 3x + 3\sin 3x) - 9\int e^x\cos 3x\,dx$$

und

$$\int e^x\cos 3x\,dx = \frac{e^x(\cos 3x + 3\sin 3x)}{10} + C\,.$$

Da e^{-x^2} die Ableitung $-2xe^{-x^2}$ hat, ist (ganz ohne partielle Integration)

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\,.$$

Dies können wir für das letzte Integral verwenden: Da wir keine Stammfunktion von e^{-x^2} kennen, wohl aber eine von $x\cdot e^{-x^2}$, setzen wir $u(x) = x^2$ und $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$; wir erhalten

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2} + C\,.$$

Mit $u(x) = \log x$ und $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ schließlich ist

$$\int x\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C\,.$$

Wie in der Vorlesung bei der Berechnung von $\int \log x\,dx$ müssen wir also auch hier den Vorfaktor als Ableitung betrachten, damit im zweiten Integral der Logarithmus durch seine Ableitung $1/x$ ersetzt wird und wir so zu einem leicht auswertbaren Integral kommen.

b) Beweisen Sie die Formel $\displaystyle\int \sin^n x \cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowohl direkt als auch via partielle Integration!

Lösung: Für den direkten Beweis müssen wir einfach die behauptete Stammfunktion ableiten; nach der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{(n+1)\sin^n x \cos x}{n+1} = \sin^n x \cos x\,.$$

Wenn wir das Integral via partielle Integration ausrechnen, setzen wir natürlich $v'(x) = \cos x$ und damit $v(x) = \sin x$, denn von $u(x) = \sin^n x$ kennen wir für beliebiges n keine Stammfunktion. Wir erhalten

$$\int \sin^n x \cos x\,dx = \sin^n x \sin x - \int \sin^{n-1} x \cos x \sin x\,dx = \sin^{n+1} x - \int \sin^n x \cos x\,dx\,.$$

Bringen wir das rechte Integral auf die linke Seite, erhalten wir

$$(n+1)\int \sin^n x \cos x\,dx = \sin^{n+1} x\,,$$

woraus die behauptete Formel sofort folgt.

c) Berechnen Sie mittels der Substitution $x = \log u$ das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}$!

Lösung: Ist $x = \log u$, so ist $dx = \dfrac{du}{u}$; außerdem ist $0 = \log 1$ und $1 = \log e$. Somit ist

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int_1^e \frac{u^2}{u+1}\,\frac{du}{u} = \int_1^e \frac{u}{u+1}\,du = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = u - \log|u+1|\,\Big|_1^e$$
$$= e - 1 - \log(e+1) + \log 2\,.$$

d) Bestimmen Sie mittels der Substitution $x = \sin u$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$!

Lösung: Für $x = \sin u$ ist $dx = \cos u\,du$, also

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du = \int \cos^2 u\,du = \int (1-\sin^2 u)\,du$$
$$= u - \frac{u - \sin u \cos u}{2} + C = \frac{u + \sin u \cos u}{2} + C = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C\,.$$

(Die Stammfunktion von $\sin^2 u$ wurde aus *a)* übernommen.)

e) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan 3x}$, $\quad\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}\quad$ und $\quad\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2}$!

Lösung: $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan 3x} = \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\log|\sin 3x|}{3} + C$

Beim zweiten Integral erhalten wir mit der Substitution $u = x+1$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_2^3 \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u}\Big|_2^3 = \frac{-1}{3} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{6}$$

Da beim dritten Integral der Integrand im Integrationsintervall $[-2,\ 1]$ an der Stelle $x=0$ nicht definiert ist, können wir es höchstens als uneigentliches Integral berechnen:

$$\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\nearrow 0}\int_{-2}^{a}\frac{dx}{x^2}+\lim_{b\searrow 0}\int_{b}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

$$=\lim_{a\nearrow 0}\left(\frac{-1}{a}-\frac{-1}{-2}\right)+\lim_{b\searrow 0}\left(\frac{-1}{1}-\frac{-1}{b}\right)=-\frac{1}{2}-\lim_{a\nearrow 0}\frac{1}{a}+\lim_{b\searrow 0}\frac{1}{b}$$

Da der erste Grenzwert $-\infty$ ist und der zweite $+\infty$, divergiert dies gegen $+\infty$; das Integral existiert also nicht. Insbesondere führt die naive Berechnung

$$\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left.\frac{-1}{x}\right|_{-2}^{1}=\frac{-1}{1}-\frac{-1}{-2}=\frac{-3}{2}$$

zu einem unsinnigen Ergebnis, denn da der Integrand überall positiv ist, kann kein bestimmtes Integral darüber negativ sein.

f) $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion!

Lösung: Da $\sinh x$ ist Ableitung von $\cosh x$ ist, kön nen wir die Regel zur logarithmischen Ableitung anwenden und erhalten $\log\cosh x$.

g) Was ist $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$?

Lösung: Auch hier ist der Zähler des Integranden die Ableitung des Nenners; die Stammfunktion ist also $\log(e^x+e^{-x})$.

h) Überlegen Sie sich, daß wir in den beiden letzten Aufgaben den gleichen Integranden hatten, aber zwei verschiedene Stammfunktionen bestimmten. Wie kann das sein?

Lösung:

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

und

$$\log\cosh x=\log\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\log(e^x+e^{-x})-\log 2$$

unterscheiden sich nur um eine Konstante. Da Stammfunktionen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt sind, stört das nicht.

i) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y)=5-\sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

Lösung: Er besteht aus allen Punkten $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ mit $z-5=-\sqrt{x^2+y^2}$, d.h. allen Punkten mit $z\le 5$, für die $(z-5)^2=x^2+y^2$ ist. Auf der Höhe $5-z$ haben wir also in der Ebene parallel zur xy-Ebene einen Kreis mit Radius $5-z$. Somit ist der Graph der Mantel eines Kegels mit Spitze in $(0,0,5)$, der sich nach unten öffnet; der Winkel zwischen Kegelachse und -mantel beträgt $45°$.

j) *Richtig oder falsch:* Der Graph einer Funktion $f(x,y)$ ist genau dann eine Ebene, wenn es $a,b,c\in\mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x,y)=ax+by+c$.

Lösung: Der Graph von $ax+by+c$ besteht aus allen $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ mit $z=ax+by+c$ oder $ax+by-z=-c$; dies ist eine Ebene.

Ist umgekehrt der Graph eine Ebene mit Gleichung $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$, so muß, da es sich um den Graphen einer Funktion $z=f(x,y)$ handelt, $\gamma\neq 0$ sein, und

$$z=f(x,y)=-\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{\beta}{\gamma}y+\frac{\delta}{\gamma}\,,$$

also ist die Behauptung richtig.

k) Welche Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^3$ kann der Graph einer Funktion $f(x,y)$ enthalten?

Lösung: Ganz bestimmt nicht die z-Achse, denn von der liegt nur der Punkt $\big(0,0,f(0,0)\big)$ im Graphen. x- und y-Achse dagegen können im Graphen liegen, nämlich dann, wenn die Funktion f durch x *bzw.* y teilbar ist, d.h. als Produkt einer Funktion $g(x,y)$ mit x oder y geschrieben werden kann.

l) Beschreiben Sie die Niveaumengen $N_a(f)$ von $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ in Abhängigkeit von a, und vergleichen Sie mit den Niveaumengen $N_a(g)$ von $g(x,y)=x^2+y^2$!

Lösung: Für $a<0$ ist $N_a(f)=N_a(g)=\emptyset$, für $a=0$ bestehen beide nur aus dem Nullpunkt, und für $a>0$ ist $N_a(f)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2=a^2\big\}$ ein Kreis mit Radius a und $N_a(g)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2=a\big\}$ ein Kreis mit Radius $\sqrt{a}$ um den Nullpunkt. Beide Funktionen haben also die gleichen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ als Niveaumengen, allerdings gehören sie (außer für $a=0$ und $a=1$) zu verschiedenen Niveaus.

m) Was können Sie über eine Funktion sagen, deren Niveaumengen abgesehen von der einelementigen Menge $\{(0,0)\}$ allesamt Kreise um den Nullpunkt von $\mathbb{R}^2$ sind?

Lösung: Es muß eine injektive Funktion $g\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ geben, so daß $f(x,y)=g(x^2+y^2)$ ist.

n) Zeigen Sie: Die Vorschrift $d_{\max}\big((u,v),(x,y)\big)=\max\big(|x-u|\,,|y-v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Wir müssen die drei Forderungen an eine Metrik überprüfen: Da $|x-u|=|u-x|$ und $|y-v|=|v-y|$ ist, folgt sofort die Symmetrie:

$$d\big((u,v),(x,y)\big)=\max\big(|x-u|\,,|y-v|\big)=\max\big(|u-x|\,,|v-y|\big)=d\big((x,y),(u,v)\big)\,.$$

Auch mit der positiven Definitheit gibt es keine Probleme, denn Beträge sind stets größer oder gleich null; ist $d\big((u,v),(x,y)\big)=\max\big(|x-u|\,,|y-v|\big)=0$, muß $|x-u|=|y-v|=0$ sein, also $x-u=y-v=0$, die beiden Punkte sind damit gleich. Bleibt noch die Dreiecksungleichung: Wir haben also drei Punkte (r,s), (u,v) und (x,y) und müssen zeigen, daß der Abstand $d\big((r,s),(x,y)\big)=\max\big(|x-r|\,,|y-s|\big)$ höchstens gleich der Summe der beiden Abstände

$$d\big((r,s),(u,v)\big)=\max\big(|u-r|\,,|v-s|\big) \text{ und } d\big((u,v),(x,y)\big)=\max\big(|x-u|\,,|y-v|\big)$$

ist. Nach der Dreiecksungleichung für $\mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}|x-r|&=|(x-u)+(u-r)|\leq|x-u|+|u-r|\\&\leq\max\big(|u-r|\,,|v-s|\big)+\max\big(|x-u|\,,|y-v|\big)\ ,\\&=d\big((r,s),(u,v)\big)+d\big((u,v),(x,y)\big)\end{aligned}$$

und entsprechend ist auch $|y-s|\leq d\big((r,s),(u,v)\big)+d\big((u,v),(x,y)\big)$. Damit ist aber auch das Maximum der beiden Zahlen kleiner oder gleich der Summe der beiden Abstände rechts, d.h. $d\big((r,s),(x,y)\big)\leq d\big((r,s),(u,v)\big)+d\big((u,v),(x,y)\big)$. Damit gilt auch die Dreiecksungleichung und wir haben alle drei Forderungen an eine Metrik nachgewiesen.

o) In $\mathbb{R}^2$ sei $d_{\max}$ die gerade definierte Maximums-Metrik und d_E die EUKLIDische Metrik. Zeigen Sie: Für zwei Punkte (x,y) und (u,v) aus $\mathbb{R}^2$ und ein $\varepsilon>0$ aus $\mathbb{R}$ gilt: Ist $d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big)\leq\varepsilon$, so ist $d_E\big((x,y),(u,v)\big)\leq\sqrt{2}\varepsilon$.

Lösung: Ist $d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big)=\max\big(|x-u|\,,\,|y-v|\big)\leq\varepsilon$, muß sowohl $|x-u|<\varepsilon$ als auch $|y-v|<\varepsilon$ sein. Somit ist

$$d_E\big((x,y),(u,v)\big)=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}\leq\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}=\sqrt{2}\varepsilon\,.$$

p) Richtig oder falsch: Die Vorschrift $d\big((u,v),(x,y)\big) = \max\big(|x-y|\,,|u-v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Mit der Symmetrie gibt es offensichtlich keine Probleme, und natürlich sind auch alle Abstände größer oder gleich Null. Allerdings ist

$$d\big((u,v),(x,y)\big) = \max\big(|x-y|\,,|u-v|\big)$$

genau dann gleich Null, wenn $x = y$ und $u = v$ ist, wenn also beide Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden liegen. Das widerspricht der Definition einer Metrik, wonach der Abstand genau dann gleich Null sein muß, wenn die beiden Punkte gleich sind.

q) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Taxi-Metrik $d\big((u,v),(x,y)\big) = |x-u| + |y-v|$ Beschreiben Sie die Menge $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\big((x,y),(0,0)\big) \le 1\big\}$ geometrisch!

Lösung: Gesucht ist die Menge aller Punkte, die bezüglich der Taxi-Metrik höchstens Abstand eins vom Nullpunkt haben, für die also gilt $|x-0|+|y-0| \le 1$, d.h. $|x|+|y| \le 1$. Im ersten Quadranten $x \ge 0, y \ge 0$ ist dies einfach die Ungleichung $x+y \le 1$, die Punkte müssen also unter der Geraden $x+y = 1$ liegen; das ist die Gerade durch die Punkte $(0,1)$ und $(1,0)$. Im Quadranten $x \ge 0, y \le 0$ haben wir die Gleichung $x-y \le 1$ oder $y \ge x-1$; die Punkte müssen also oberhalb der Geraden $y = x-1$ liegen. Diese geht durch die Punkte $(1,0)$ und $(0,-1)$. Im Quadranten $x \le 0, y \le 0$ wird die Bedingung zu $-x-y \le 1$ oder $y \ge -1-x$; hier muß (x,y) also oberhalb der Geraden $y = 1-x$ durch $(0,-1)$ und $(-1,0)$ liegen. Im verbliebenen Quadranten $x \le 0, y \ge 0$ schließlich muß $-x+y \le 1$ sein, also $y \le 1+x$; diese Gerade geht durch $(0,1)$ und $(-1,0)$. Unsere Menge ist also also gerade das Quadrat mit Ecken $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ und $(-1,0)$.