Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11–13. Februar 2015

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration:

$$\int \sin^2 x\,dx,\quad \int \cos^2 x\,dx,\quad \int e^x \cos 3x\,dx,\quad \int xe^{-x^2}\,dx,\quad \int x^3e^{-x^2}\,dx,\quad \int x\log x\,dx$$

b) Beweisen Sie die Formel $\int \sin^n x \cos x\,dx = \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowohl direkt als auch via partielle Integration!

c) Berechnen Sie mittels der Substitution $x = \log u$ das Integral $\int\limits_0^1 \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$!

d) Bestimmen Sie mittels der Substitution $x = \sin u$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$!

e) Bestimmen Sie $\int \dfrac{dx}{\tan 3x}$, $\quad \int\limits_1^2 \dfrac{dx}{(x+1)^2}$ und $\int\limits_{-2}^1 \dfrac{dx}{x^2}$!

f) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion!

g) Was ist $\int \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$?

h) Überlegen Sie sich, daß wir in den beiden letzten Aufgaben den gleichen Integranden hatten, aber zwei verschiedene Stammfunktionen bestimmten. Wie kann das sein?

i) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

j) *Richtig oder falsch:* Der Graph einer Funktion $f(x,y)$ ist genau dann eine Ebene, wenn es $a,b,c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x,y) = ax + by + c$.

k) Welche Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^3$ kann der Graph einer Funktion $f(x,y)$ enthalten?

l) Beschreiben Sie die Niveaumengen $N_a(f)$ von $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in Abhängigkeit von a, und vergleichen Sie mit den Niveaumengen $N_g(a)$ von $g(x,y) = x^2+y^2$!

m) Was können Sie über eine Funktion sagen, deren Niveaumengen abgesehen von der einelementigen Menge $\{(0,0)\}$ allesamt Kreise um den Nullpunkt von $\mathbb{R}^2$ sind?

n) Zeigen Sie: Die Vorschrift $d_{max}\big((u,v),(x,y)\big) = \max\big(|x-u|\,,|y-v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$!

o) In $\mathbb{R}^2$ sei d_{max} die gerade definierte Maximums-Metrik und d_E die Euklidische Metrik. Zeigen Sie: Für zwei Punkte (x,y) und (u,v) aus $\mathbb{R}^2$ und ein $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{R}$ gilt: Ist $d_{max}\big((x,y),(u,v)\big) \le \varepsilon$, so ist $d_E\big((x,y),(u,v)\big) \le \sqrt{2}\varepsilon$.

p) *Richtig oder falsch:* Die Vorschrift $d\big((u,v),(x,y)\big) = \max\big(|x-y|\,,|u-v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$!

q) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Taxi-Metrik $d\big((u,v),(x,y)\big) = |x-u| + |y-v|$ Beschreiben Sie die Menge $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\big((x,y),(0,0)\big) \le 1\big\}$ geometrisch!