Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. Mai 2015

12. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sin x$ für $|x| \le k\pi$ und $f_k(x) = 0$ sonst bilden eine approximierende Folge für $\sin x$.

2) Richtig oder falsch: Ist $f \in \mathrm{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ stetig und $\|f\|_1 = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

3) Richtig oder falsch: Für die Dirichletsche Sprungfunktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ und eine beliebige Funktion $f \in \mathrm{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist $\|f + \chi_{\mathbb{Q}}\|_1 = \|f\|_1$.

4) Richtig oder falsch: Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen χ_Q, so konvergiert sie bezüglich $\|\cdot\|_1$ auch gegen die Nullfunktion.

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Definieren Sie zwei nicht äquivalente Normen auf $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und beweisen Sie deren Nichtäquivalenz!

b) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Funktionen mit kompaktem Träger von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, und f sei irgendeine Funktion von R^n nach $\mathbb{R}$. Definieren Sie exakt, was es bedeutet, daß $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ gegen f konvergiert!

c) Beweisen Sie, daß $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dann eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|$ ist!

d) Welche weitere Konvergenzbegriffe gibt es für die obige Folge? Geben Sie für mindestens zwei davon eine genaue Definition!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß es für jede natürliche Zahl k genau eine reelle Zahl $c_k > 0$ gibt mit $kx = \cos x$, und daß $c_k < \frac{1}{k}$ ist!

b) Die Funktionen $f, f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\pi \\ \sin x & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ \cos x & \text{für } 0 < x < \frac{5}{2}\pi \\ 0 & \text{für } x \ge \frac{5}{2}\pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\pi \\ \sin x & \text{für } -\pi \le x < 0 \\ kx & \text{für } 0 \le x < c_k \\ \cos x & \text{für } c_k \le x < \frac{5}{2}\pi \\ 0 & \text{für } x \ge \frac{5}{2}\pi \end{cases} .$$

Zeigen Sie, daß $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für f ist!

c) Was ist $\int_{\mathbb{R}} f_k$, und was ist $\int_{\mathbb{R}} f$?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. Mai 2015, um 10.00 Uhr