Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

6. Mai 2015

11. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge alle reeller Zahlen der Form $a + a^2\sqrt{2}$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge.

2) Richtig oder falsch: Sind zwei stetige Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast überall gleich, so sind sie gleich.

3) Richtig oder falsch: Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $f_k: D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}$ punktweise gegen die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ und sind alle f_k unstetig im Punkt $x \in D$, so ist auch f unstetig im Punkt x.

4) Richtig oder falsch: Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $f_k: D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}$ punktweise gegen die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ und sind alle f_k stetig im Punkt $x \in D$, so ist auch f stetig im Punkt x.

5) Richtig oder falsch: $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn $\mu^*(M) = 0$ ist.

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*
Die Funktion $f_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{falls } |x| \le k \\ e^{-k}(k+1-|x|) & \text{falls } |x| \in [k,\, k+1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f_1 !

b) Zeigen Sie, daß alle f_k Funktionen mit kompaktem Träger sind!

c) Geben Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, gegen die die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *punktweise* konvergiert!

d) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Cauchy-Folge bezüglich der L^1-Norm auf $K^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

e) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm auf $K^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

f) Konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f ?

g) Berechnen Sie die Riemann-Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$!

h) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für f ?

i) Was ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k$?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Für $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \pi \text{ und } \sin x \le y \le \cos x\right\}$ ist $\mu^*(M) \le \frac{\pi}{2}$.

b) Welchen Wert erwarten Sie für $\mu^*(M)$?

c) Für $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$ ist $\mu^*(M) \le 15$.

d) Welchen Wert erwarten Sie für $\mu^*(M)$?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 13. Mai 2015, um 10.00 Uhr