Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

29. April 2015

10. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Welchen Träger hat die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \max(x^2 - y^2, 0)$?

2) Richtig oder falsch: Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Kreisscheibe, so ist die Funktion g, die auf D mit f übereinstimmt und sonst überall verschwindet. eine Funktion mit kompaktem Träger.

3) Richtig oder falsch: Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger nimmt sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum auf $\mathbb{R}^n$ an.

4) Richtig oder falsch: Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch das Produkt fg in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

5) Richtig oder falsch: Eine Nullmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ enthält alle ihre Randpunkte.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$. Berechnen Sie $\int_Q x^2 + y^2$!

b) R sei das Rechteck mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$. Berechnen Sie $\int_R e^{xy} - e^{x+y}$!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch $f(x,y) = \min(1 - x^2, 1 - y^2)$ und $g(x,y) = f(x,y)$, falls $f(x,y) \geq 0$ ist, aber $g(x,y) = 0$ falls $f(x,y) < 0$ ist.

a) Sind f und/oder g Funktionen mit kompaktem Träger?

b) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!

c) Was ist $\int_{\mathbb{R}^2} g$?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Sind $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = f(x)g(y)$ und $Q = [a, b] \times [c, d]$, so ist $\int_Q h = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(x)\,dx\right)$!

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = 4xye^{x^2+y^2}$, und Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
$0 < a < b$ seien reelle Zahlen, und für $x > 0$ sei $\Gamma_{a,b}(x) \underset{\text{def}}{=} \int_a^b e^{-t} t^{x-1}\,dt$.

a) Zeigen Sie, daß $\Gamma_{a,b}$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$ ist!

b) Zeigen Sie, daß $\Gamma_{a,b}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist mit $\Gamma_{a,b}^{(n)}(x) = \int_a^b (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 6. Mai 2015, um 10.00 Uhr