

22. April 2015

9. Übungsblatt Analysis II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Finden Sie eine Iterationsvorschrift, die mit Hilfe des NEWTON-Verfahrens Näherungswerte für $\sqrt[n]{a}$ liefert! ($a \in \mathbb{R}$ positiv, $n \geq 2$).
- 2) *Richtig oder falsch:* Das NEWTON-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen des Polynoms $x^2 + 1$ konvergiert bei Startwert 1 gegen i .
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ konvergiert auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen $\cos x$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ konvergiert gleichmäßig gegen $\sin x$.
- 5) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{(nx)^2}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Die Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien rekursiv definiert durch die Vorschriften $f_0(x) = 1$ und $f_n(x) = 1 - \int_0^x t^4 f_{n-1}(t) dt$ für $n \geq 1$. Was ist $f_3(x)$?
- b) Drücken Sie $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ durch bekannte Funktionen aus!
- c) Zeigen Sie, daß $f(x) = 1 - \int_0^x t^4 f(t) dt$ ist und $f'(x) = -x^4 f(x)$!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 - 4x$!
- b) Bestimmen Sie nun näherungsweise mit Hilfe des NEWTON-Verfahrens drei Lösungen der Gleichung $f(x) = 1$, indem Sie, ausgehend von den drei Nullstellen von f , jeweils drei Iterationsschritte durchführen!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bei der Beugung am Spalt erhält man Intensitätsmaxima bei den Winkeln x für die gilt $\tan x = x$.

- a) Zeigen Sie, daß zwischen 4 und 5 so einen Fixpunkt x^* gibt, und untersuchen Sie, ob er stabil ist!
- b) Sollte die Folge der x_n mit $x_n = \tan x_{n-1}$ und $x_0 = 4\frac{1}{2}$ gegen x^* konvergieren?
- c) Was ändert sich, wenn Sie statt mit dem Tangens mit dem Arkustangens arbeiten?
- d) Bestimmen Sie, ausgehend vom Näherungswert 4,5, mit einem geeigneten Verfahren die ersten vier Nachkommastellen von x^* !

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 29. April 2015, um 10.00 Uhr