WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

15. April 2015

8. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und wegzusammenhängend, so ist auch $\mathbb{R}^2 \setminus X$ wegzusammenhängend.

2) *Richtig oder falsch:* Das Bild einer wegzusammenhängenden Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ unter einer stetigen Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist wegzusammenhängend.

3) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge von Elementen des normierten Vektorraums V mit Norm $\|\cdot\|$, so ist $\big(\|x_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge reeller Zahlen.

4) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen des normierten Vektorraums V mit Norm $\|\cdot\|$ und ist $\big(\|x_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge reeller Zahlen, so ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge.

5) *Richtig oder falsch:* Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CAUCHY-Folgen von Elementen des normierten Vektorraums V, so ist auch $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig,* wenn es einen Punkt $x \in S$ gibt, so daß für jeden weiteren Punkt $y \in S$ die Verbindungsstrecke von x und y ganz in S liegt.

a) Ist eine sternförmige Menge notwendigerweise konvex? wegzusammenhängend? zusammenhängend? kompakt?

b) Ist eine konvexe/wegzusammenhängende/zusammenhängende/kompakte Menge notwendigerweise sternförmig?

c) Zeigen Sie: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ ist sternförmig!

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $f([a, b]) = [a, b]$. Zeigen Sie: Dann hat f mindestens einen Fixpunkt in $[a, b]$.

b) f sei ein Polynom vom ungeraden Grad $n \geq 3$. Zeigen Sie: Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

c) Gilt dies auch für $n = 1$?

d) Gilt das auch für Polynome von geradem Grad?

e) $X \subset \mathbb{R}^n$ sei eine kompakte zusammenhängende Menge und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $f(X) = X$. Muß f einen Fixpunkt $x \in X$ haben?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Für welche $\lambda \geq 0$ wird das Intervall $I = [0, 1]$ durch die Abbildung $f_\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ auf sich selbst abgebildet?

b) Berechnen Sie für diese λ die Fixpunkte von f_λ und diskutieren Sie deren Stabilität!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 22. April 2015, um 10.00 Uhr