WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

25. März 2015

7. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist $Z \cap A$ kompakt.
2) *Richtig oder falsch:* Das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus X$ einer kompakten Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.
3) *Richtig oder falsch:* f sei auf $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 2\}$ differenzierbar, und ∇f sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ auf der Einheitssphäre $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ an.
4) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig auf der kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ und ist $Z \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, so ist auch das Urbild $f^{-1}(Z)$ kompakt.
5) *Richtig oder falsch:* Jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Welche der folgenden Mengen ist kompakt?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < 1\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 10\}, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^6 + z^8 \leq 100\}$$

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

a) $Z \subset \mathbb{R}^n$ sei kompakt und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß es dazu (mindestens) einen Punkt $y \in Z$ gibt, für den die EUKLIDische Metrik $d(x,y) \leq d(x,z)$ ist für alle $z \in Z$.
b) Wir bezeichnen die Zahl $d(x,y)$ aus *a)* mit $d(x,Z)$. Zeigen Sie, daß $Z_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,Z) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge ist!
c) Zeigen Sie, daß Z gleich dem Durchschnitt aller offener Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $Z \subseteq U$ ist!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von $f(x,y) = 3x^4 + y^4$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 3y^2 \leq 7$!

FROHE OSTERN!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 15. April 2014, um 10.00 Uhr