

18. März 2015

6. Übungsblatt Analysis II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sei komplex differenzierbar. Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen den HESSE-Matrizen von u und v ?
- 2) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $H_{\lambda f + \mu g} = \lambda H_f + \mu H_g$.
- 3) *Richtig oder falsch:* Ist A eine positiv definite $n \times n$ -Matrix und B eine negativ definite, so ist $A - B$ positiv definit.
- 4) Durch welche Matrix ist die quadratische Form $f(x, y) = xy$ gegeben?
- 5) Welchen Korrelationskoeffizienten haben die drei Datenpaare $(0, 0)$, $(1, 2)$ und $(2, 7)$?

Aufgabe 6: (5 Punkte)

- a) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sei komplex differenzierbar. Zeigen Sie: Dann ist $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$.
- b) Zeigen Sie, daß $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ erfüllt!
- c) Finden Sie dazu eine Funktion $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex differenzierbar ist! Ist v eindeutig bestimmt?

Aufgabe 7: (5 Punkte)

- a) Wir wissen vom vierten Übungsblatt, daß der Gradient von $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ für $x = \frac{3}{2}$ und $y = \pm \frac{3}{2}$ verschwindet. Was sagt Ihnen die HESSE-Matrix über das dortige Verhalten der Funktion?
- b) In welchen Punkten (x, y) läßt sich die Gleichung $f(x, y) = 0$ nicht nach y auflösen?
- c) Um jeden anderen Kurvenpunkt existiert lokal eine Auflösung $y = g(x)$. Bestimmen Sie die Maxima und Minima von g !

Aufgabe 8: (5 Punkte)

- a) Die folgende Tabelle enthält das Bruttoinlandsprodukt pro Einwohner und den CPI für drei Staaten:

Land	BIP/Einwohner	CPI
Griechenland	17400	43
Italien	25600	43
Luxemburg	83400	82

Berechnen Sie Ausgleichsgerade und Korrelationskoeffizient!

- b) Gegeben sind N Paare (x_i, y_i) von Werten, zwischen denen zumindest ungefähr ein Zusammenhang der Form $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$ bestehen sollte. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate optimalen Koeffizienten a, b und c !