WOLFGANG K. SEILER A5, C201
*Tel.* 2515

*11. März 2015*

# 5. Übungsblatt Analysis II

**Fragen:** *(je ein Punkt)*

*1)* *Richtig oder falsch:* Die komplexe Konjugation $x+iy \mapsto x-iy$ ist eine komplex differenzierbare Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

*2)* *Richtig oder falsch:* Jede komplex differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die nur reelle Werte annimmt, ist konstant.

*3)* *Richtig oder falsch:* Für eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verschwindet $f_{xy}$ genau dann überall, wenn es differenzierbare Funktionen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x,y) = g(x) + h(y)$ ist.

*4)* Was können Sie über eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, deren HESSE-Matrix überall verschwindet?

**Aufgabe 5:** *(5 Punkte)*

*a)* Beweisen Sie durch Vergleich der Matrizendarstellungen von $e^{ix}$, $e^{iy}$ und $e^{i(x+y)}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus!

*b)* Vergleichen Sie $\sin ix$ und $\cos ix$ mit $\sinh x$ und $\cosh x$!

*c)* Über die EULERschen Formeln lassen sich Sinus und Kosinus auch für beliebige komplexe Argumente definieren. Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile von $\sin(x+iy)$ und $\cos(x+iy)$, überprüfen Sie, ob die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitungen!

**Aufgabe 6:** *(5 Punkte)*

*a)* Beweisen Sie die Kettenregel für komplex differenzierbare Funktionen: Sind $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so auch $f \circ g$, und die Ableitung im Punkt $u$ ist $f'\big(g(z)\big) \cdot g'(z)$.

*b)* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei bijektiv und komplex differenzierbar, und auch die Umkehrfunktion $g$ von $f$ sei komplex differenzierbar. Verwenden Sie *a)*, um die Ableitung von $g$ durch die von $f$ auszudrücken!

**Aufgabe 7:** *(6 Punkte)*

Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom fünften Grades um den Nullpunkt $(0,0)$ für die folgenden Funktionen:

*a)* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto e^{x^2-y^3}$

*b)* $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \sin(x-y^2) + \cos(x^2+y)$