WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

4. März 2015

4. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ habe in keinem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Maximum. Dann ist f unbeschränkt.

2) Richtig oder falsch: $f: W \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf dem Würfel $W = [-1, 1]^n$, Falls f in einem Punkt $x \in W$ sein Maximum annimmt, ist dort $\operatorname{grad} f = 0$.

3) Konstruieren Sie eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die keine der beiden partiellen Ableitungen überall verschwindet, aber $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$ ist, ohne daß der Nullpunkt Maximum, Minimum oder Sattelpunkt wäre!

4) Richtig oder falsch: Im Punkt (x_0, y_0) verschwinde der Gradient der differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Außerdem habe $f(x_0, y)$ ein lokales Minimum im Punkt $y = y_0$ und $f(x, y_0)$ ein lokales Miniumum im Punkt $x = x_0$. Dann hat $f(x, y)$ ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

5) Richtig oder falsch: Hat $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt (x_0, y_0) ein lokales Maximum und ist $g(x_0, y_0) = 0$, so hat f in (x_0, y_0) auch ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*
Bestimmen Sie die lokalen Maxima, Minima und Sattelpunkte der folgenden Funktionen und, sogern sie existieren, auch die globalen Maxima und Minima:

a) $f_1(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ *(2 Punkte)*

b) $f_2(x, y) = 1 - e^{x^2+y^2}$ *(1 Punkt)*

c) $f_3(x, y) = \cos(x + y)\cos(x - y)$*(3 Punkte; denken Sie an die* EULER*schen Formeln!)*

d) $f_4(x, y) = (x + y)^4$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 10 Euro, 5 Euro *bzw.* 20 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $100\sqrt{x}\sqrt[4]{y}\sqrt[4]{z}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für $120\,000$ Euro maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von $120\,000$ Euro zu erhöhen?

Aufgabe 8: *(2 Punkte)*
$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ sei ein Polynom n-ten Grades, und x_0 sei eine Nullstelle von f. Zeigen Sie: Falls x_0 keine mehrfache Nullstelle ist, gibt es ein offenes Intervall $(-c, c)$ und eine Funktion $\varphi: (-c, c) \to \mathbb{R}$, so daß $\varphi(0) = x_0$ ist und $p\big(\varphi(y)\big) = y$ für alle $y \in (-c, c)$.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 11. März 2015, um 10.00 Uhr