Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

25. Februar 2015

3. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x, x)$ ist differenzierbar.

2) Richtig oder falsch: Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist differenzierbar.

3) Richtig oder falsch: $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $y \in D$ gibt, so daß $0 < \|x - y\| < \varepsilon$ ist.

4) Richtig oder falsch: Jeder Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist entweder ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von D.

5) Richtig oder falsch: Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von D in D liegt.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ im Punkt $(0, 0)$ stetig?

b) Ist sie dort differenzierbar?

c) Ist auch die Ableitung stetig?

d) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Gradient von $f(x, y) = x^4 + yx^2 - x^2 - y$ verschwindet!

Aufgabe 7: *(9 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Gradienten der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(xy) + \cos(yz)}{1 + \cos^2(xyz)} \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = \frac{\sin(x + y)}{e^{x+z}}\,!$$

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y, z) = \bigl((xy + z)^2, x^2y^3z^4 - x^4y^3z^2\bigr) \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = \bigl(\cos(x^2 + y^2 + z^2), e^{\sin(xy)}\bigr)\,!$$

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 5. März 2015, um 10.00 Uhr