WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

18. Februar 2015

2. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x, x)$ ist stetig.

2) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist stetig.

3) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier offener Teilmengen A, B eines metrischen Raums X ist offen.

4) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt beliebig vieler offener Teilmengen eines metrischen Raums X ist offen.

5) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen A, B eines metrischen Raums X ist abgeschlossen.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 100 \text{ und } 3 \le x \le 5\right\}$!

b) Entscheiden Sie für jeden der drei Punkte $(4, 4)$, $(5, 5)$ und $(6, 6)$, ob er innerer, äußerer oder Randpunkt von M ist!

c) Ist M offen oder abgeschlossen?

Aufgabe 7: *(3 Punkte)*
Welche der hier definierten Folgen in $\mathbb{R}^2$ sind konvergent bezüglich der EUKLIDischen Metrik, und wohin konvergieren die?

a) $\left(\dfrac{2n+3}{3n-2}, \dfrac{3n-2}{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *b)* $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, (-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *c)* $\left(e^{1-n^2}, 2 + \sin\dfrac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis: Denken Sie daran, daß sie nicht unbedingt mit der EUKLIDischen Metrik rechnen müssen!

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie durch schrittweise Anwendung der Lemmata der Vorlesung, daß die

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \\ \quad (x, y) \quad\;\; \mapsto \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, e^{\sin(xy)}\right) \end{cases} \qquad \text{stetig ist !}$$

Aufgabe 9: *(4 Punkte)*
U sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß dann auch $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen ist!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 25. Februar 2015, um 10.00 Uhr