

11. Februar 2015

1. Übungsblatt Analysis II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Die Niveaulinien $N_a(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\}$ der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu den Funktionswerten $a \in \mathbb{R}$ seien die Geraden $y = a - x$. Was ist f ?
- 2) Der Graph $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = z\}$ der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y in \mathbb{R}^2 und z in \mathbb{R} sei die Fläche, die aus der Parabel $z = 1 - x^2$ durch Rotation um die z -Achse entsteht. Was ist f ?
- 3) *Richtig oder falsch:* Ist d eine Metrik auf \mathbb{R}^n , so auch $2d$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Ist d eine Metrik auf \mathbb{R}^n , so auch d^2 .

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Beweisen Sie die Formel $\int x^n e^x dx = e^x \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} n!}{i!} x^i + C$ sowohl direkt als auch via partielle Integration und vollständige Induktion!

Aufgabe 6: (7 Punkte)

- a) Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sowohl mit Hilfe der Substitution $x = \sin u$ als auch mit der Substitution $x = \cos v$!
- b) Mit welcher der beiden Substitutionen $x = \sinh u$ und $x = \cosh u$ können Sie $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ am besten berechnen?
- c) Für welches ähnliche Integral ist die andere Substitution nützlich?
Zur Erinnerung: $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ erfüllen die Hyperbelgleichung $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Ihre Umkehrfunktionen heißen $\operatorname{arsinh} x$ und $\operatorname{arcosh} x$.

Aufgabe 7: (5 Punkte)

Berechnen Sie die Integrale

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx, \quad \int \frac{1}{e^x + 1} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx!$$

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 18. Februar 2015, um 10.00 Uhr