WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

8. November 2014

Zwischenklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für drei Mengen A, B, C gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

Lösung: *Falsch:* Ist etwa $A = \emptyset$ und $C = \mathbb{N}$, so ist $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ und $(A \cap B) \cup C = \mathbb{N}$ unabhängig von B.

2) Richtig oder falsch: Für jede komplexe Zahl z ist $\mathfrak{Re}\, z \le |z|$.

Lösung: *Richtig:* Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\mathfrak{Re}\, z = x \le |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, da $y^2 \ge 0$

3) Richtig oder falsch: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen, für die beide Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so konvergieren auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung: *Richtig,* denn $a_n = \frac{1}{2}\big((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\big)$ und $b_n = \frac{1}{2}\big((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\big)$, und Summen und Differenzen konvergenter Folgen konvergieren.

4) Richtig oder falsch: Die Differenz aus einer monoton wachsenden Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer monoton fallenden Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.

Lösung: *Richtig:* Da $a_{n+1} \ge a_n$ und $b_{n+1} \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1} - b_{n+1} \ge a_n - b_n$; die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also monoton wachsend (und $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend).

5) Richtig oder falsch: $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}$

Lösung: *Falsch:* Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, läge mit $\sqrt[4]{2}$ auch deren Quadrat $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$, was bekanntlich nicht der Fall ist.

6) Richtig oder falsch: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, deren Bild ganz in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ liegt, so ist dieses Bild ein abgeschlossenes Intervall.

Lösung: *Falsch;* ist beispielsweise $f(x) = 1/(1+x^2)$, so ist das Bild gleich dem halboffenen Intervall $(0, 1]$, also kein abgeschlossenes Intervall.

7) Richtig oder falsch: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ konvergiert.

Lösung: *Falsch,* denn

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \big(\log(k+1) - \log k\big) = \sum_{k=2}^{n+1} \log k - \sum_{k=1}^{n} \log k = \log(n+1)$$

divergiert bestimmt gegen ∞.

8) *Richtig oder falsch:* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn dies ist eine alternierende Reihe, und die Zahlen $\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ bilden wegen der Monotonie des Logarithmus eine monoton fallende Nullfolge, so daß die Reihe nach dem LEIBNIZ-Kriterium konvergiert.

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ und b) $(1+i\sqrt{3})^2$ möglichst einfach dar!

Lösung: Bei *a)* erweitern wir so, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $\sqrt{5}+\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{5+\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\,.$$

Für *b)* berechnen wir zunächst $(1+i\sqrt{3})^2 = 1^2+2i\sqrt{3}+3i^2 = -2+2i\sqrt{3}$. Das multiplizieren wir mit $(-1+i\sqrt{3})$ und erhalten

$$(1+i\sqrt{3})^3 = (-2+2i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = -2+2(i\sqrt{3})^2+2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3} = -2-2\cdot 3 = -8\,.$$

c) Zeigen Sie, daß $(1+i\sqrt{3})^{1014}$ eine reelle Zahl ist, und geben Sie an, wie viele Dezimalstellen sie vor dem Komma hat! (Hinweis: $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$)

Lösung: $1014 = 3\cdot 338$; daher ist $(1+i\sqrt{3})^{1014} = (-8)^{338} = 2^{1014}$ eine reelle Zahl. Ihr dekadischer Logarithmus ist ungefähr $1014\cdot 0{,}30103 = 305{,}24442$; sie hat also 306 Dezimalstellen.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1-\frac{1}{(n+1)^2}$!

Lösung: Das kann beispielsweise durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß

$$\frac{3}{1\cdot 2^2} = 1-\frac{1}{2^2}$$

ist; da beides gleich 3/4 ist, gibt es damit keine Probleme.

Für den Induktionsschluß nehmen wir an, die Behauptung sei für ein festes $n\in\mathbb{N}$ bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} + \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2} \underset{\text{IA}}{=} 1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{(n+2)^2-(2n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1-\frac{n^2+4n+4-2n-3}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1-\frac{1}{(n+2)^2}\,,\end{aligned}$$

so daß die Behauptung auch für $n+1$ gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$?

Lösung: Da die Folge der Zahlen $1/(n+1)^2$ gegen null konvergiert, ist diese Summe gleich eins.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 10$. Zeigen Sie, daß es ein $x \in (a, b)$ gibt mit $f(x) = 3$, und konstruieren Sie eine Intervallschachtelung $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für x!

Lösung: Wir setzen $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Dann ist $f(a_1) < 3 < f(b_1)$; nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x \in [a_1, b_1]$ mit $f(x) = 3$. Wir konstruieren rekursiv weitere Intervalle $[a_n, b_n]$ mit $f(a_n) \le 3 \le f(b_n)$ wie folgt: Ist $[a_n, b_n]$ gegeben, so betrachten wir die Intervallmitte $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Falls $f(c_n) \ge 3$ ist, setzen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c_n$, andernfalls setzen wir $a_{n+1} = c_n$ und $b_{n+1} = b_n$. In jedem Fall ist $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ und $f(a_{n+1}) \le 3 \le f(b_{n+1})$, d.h. es gibt ein $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $f(x) = 3$. Da jedes Intervall die halbe Länge seines Vorgängers hat, bilden die Intervalllängen eine Nullfolge, wir haben also eine Intervallschachtelung für eine der gesuchten Zahlen x.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß für zwei beliebige natürliche Zahlen n, m die Zahl $(n+m)^5 - n^5 - m^5$ durch fünf teilbar ist!

Lösung: Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$(n+m)^5 - n^5 - m^5 = \binom{5}{1} n^4 m + \binom{5}{2} n^3 m^2 + \binom{5}{3} n^2 m^3 + \binom{5}{4} n m^4 .$$

Da $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = \frac{5}{1} = 5$ und $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$ durch fünf teilbar sind, folgt die Behauptung.

b) Für zwei positive reelle Zahlen $a \le b$ ist das *geometrische Mittel* definiert als $G = \sqrt{ab}$ und das harmonische Mittel als $H = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$. Zeigen Sie, daß $a \le H \le G \le b$ ist!

Lösung: Durch Erweiterung mit $2ab$ können wir das harmonische Mittel einfacher ausdrücken als

$$H = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b} .$$

Somit ist

$$H - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{2ab - a(a+b)}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b} \ge 0 ,$$

da $b \ge a > 0$ sind. Also ist $a \le H$.

Die Ungleichung $H \le G$ ist, da beide Zahlen positiv sind, äquivalent zu $H^2 \le G^2$ oder $G^2 - H^2 \ge 0$.

$$\begin{aligned} G^2 - H^2 &= ab - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = ab - \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} = \frac{ab(a^2+2ab+b^2) - 4a^2b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab(a^2-2ab+b^2)}{(a+b)^2} = \frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \ge 0\,, \end{aligned}$$

da a, b und $(a+b)^2$ positiv sind und $(a-b)^2 \ge 0$. Schließlich ist wegen $0 \le a \le b$ auch $a^2 \le ab$, also wegen der Monotonie der Wurzelfunktion auch $a = \sqrt{a^2} \le \sqrt{ab} = G$. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*

Entscheiden Sie für jede der hier definierten Folgen, ob sie konvergent, bestimmt oder unbestimmt divergent, beschränkt und/oder monoton ist! Geben Sie im Falle der Konvergenz, soweit möglich, auch den Grenzwert an!

a) $x_n = \dfrac{2n-3}{4n-5}$ *b)* $y_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$ *c)* $z_n = 3^n - e^n$

Lösung:

a) $x_n = \dfrac{2n-3}{4n-5} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4n-6}{4n-5}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{4n-5}{4n-5}\right) - \dfrac{1}{4n-5}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{4n-5}\right)$.

In der letzten Klammer steht 1 minus eine ab $n = 2$ monoton fallende Nullfolge; somit konvergiert die Folge der x_n nach den Rechenregeln für Grenzwerte gegen $1/2$, und sie ist ab $n = 2$ monoton wachsend. Da $x_1 = 1$ aber größer ist als $x_2 = \frac{1}{3}$, ist die Folge selbst nicht monoton wachsend. Alle x_n mit $n \ge 2$ sind kleiner als der Grenzwert $1/2$, also ist $x_1 = 1$ eine obere Schranke. Die untere Schranke ist $x_2 = \frac{1}{3}$, denn alle x_n mit $n \ge 3$ sind größer und x_1 erst recht.

b) $y_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \dfrac{5^n\left(1 - (\frac{2}{5})^n\right)}{5^n\left(1 + (\frac{2}{5})^n\right)} = \dfrac{1 - (\frac{2}{5})^n}{1 + (\frac{2}{5})^n}$.

Da die Zahlen $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ gegen null konvergieren, ist $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Da alle Folgenglieder kleiner als eins sind, der Grenzwert aber gleich eins, ist die Folge höchstens dann monoton, wenn sie monoton wächst. Tatsächlich ist sie sogar streng monoton wachsend: Die hierfür zu zeigende Ungleichung

$$\frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{5^{n+1} + 2^{n+1}} > \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$$

ist äquivalent zu

$$(5^{n+1} - 2^{n+1})(5^n + 2^n) > (5^n - 2^n)(5^{n+1} + 2^{n+1})\,.$$

Ausmultiplizieren zeigt, daß die linke Seite gleich

$$5^{2n+1} + 5^{n+1}\cdot 2^n - 2^{n+1}\cdot 5^n - 2^{2n+1} = 5^{2n+1} + (5-2)\cdot 10^n - 2^{2n+1} = 5^{2n+1} + 3\cdot 10^n - 2^{2n+1}$$

ist und die rechte gleich

$$5^{2n+1} + 5^n\cdot 2^{n-1} - 2^n\cdot 5^{n+1} - 2^{2n+1} = 5^{2n+1} + (2-5)\cdot 10^n - 2^{2n+1} = 5^{2n+1} - 3\cdot 10^n - 2^{2n+1}\,,$$

also ist die Ungleichung erfüllt.

Der Grenzwert eins ist somit eine obere Schranke, und $y_1 = 3/7$ ist eine untere.

c) $z_n = 3^n - e^n = e^n\left(\left(\frac{3}{e}\right)^n - 1\right)$ ist, da sowohl e als auch $3/e$ größer als eins sind, das Produkt zweier streng monoton wachsender bestimmt gegen ∞ divergierender Folgen. Daher ist die Folge selbst streng monoton wachsend und bestimmt divergent gegen ∞. Sie ist damit insbesondere nicht beschränkt.

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert!

Lösung: $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; daher ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Daher konvergiert die Summe gegen eins.

b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$ konvergiert!

Lösung: Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\frac{\frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{\sqrt{k}}{k!}} = \frac{\sqrt{k+1}\cdot k!}{\sqrt{k}\cdot (k+1)!} = \sqrt{\frac{k+1}{k}}\cdot\frac{1}{k+1} = \sqrt{1+\frac{1}{k}}\cdot\frac{1}{k+1}\,.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert der erste Faktor gegen eins, da der Radikand gegen eins konvergiert und die Wurzelfunktion stetig ist. Der zweite Faktor konvergiert natürlich gegen null, also ist der Grenzwert für $k \to \infty$ gleich null und damit insbesondere betragsmäßig kleiner als eins. Daher konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum, das Supremum, das Minimum und das Maximum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 5\}$ *b)* $B = \{2^n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$!

Lösung:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{5}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{5}\}$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt, also existieren weder Infimum noch Supremum und erst recht weder Minimum noch Maximum.

b) Da 2^n und damit auch $2^n + 1$ unbegrenzt wachsen, ist die Menge nicht nach oben beschränkt; es gibt also weder Supremum noch Maximum. Da alle Elemente positiv sind, ist sie nach unten beschränkt; da 2^n für negative $n \in \mathbb{Z}$ beliebig klein werden kann, ist das Infimum gleich eins. Da es nicht in der Menge liegt, gibt es kein Minimum.

Aufgabe 8: (*6 Punkte*)
In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{falls } |x| < 1 \\ e^{(x+1)} & \text{falls } 1 \le |x| \le 2 \\ (x-1)e^x & \text{falls } |x| > 2 \end{cases}$$

stetig?

Lösung: Für $x \notin \{\pm 1, \pm 2\}$ stimmt f mit einer Funktion überein, die entweder aus der stetigen Betragsfunktion und der darauf angewandten für nichtnegative Argumente definierten und stetigen Wurzelfunktion zusammengesetzt ist oder aber aus einem Polynom und einer Exponentialfunktion; daher ist sie dort stetig.
Für $x = \pm 1$ ist $\sqrt{|x|} = 1$; für $x = 1$ ist $e^{x+1} = e^2$ davon verschieden, so daß die Funktion dort nicht stetig ist. Für $x = -1$ ist aber $e^{x+1} = e^0 = 1$; dort ist f also stetig. Für $x = 2$ ist $e^{x+1} = e^3$ und $(x-1)e^x = e^2$; für $x = -2$ ist $e^{x+1} = e^{-1}$, aber $(x-1)e^x = -2e^{-2}$. Daher ist die Funktion an keiner der beiden Stellen stetig.
f ist somit stetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.