Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

8. November 2014

Zwischenklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Für drei Mengen A, B, C gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
2) *Richtig oder falsch:* Für jede komplexe Zahl z ist $\mathfrak{Re}\, z \le |z|$.
3) *Richtig oder falsch:* Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen, für die beide Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so konvergieren auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) *Richtig oder falsch:* Die Differenz aus einer monoton wachsenden Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer monoton fallenden Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.
5) *Richtig oder falsch:* $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}$
6) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, deren Bild ganz in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ liegt, so ist dieses Bild ein abgeschlossenes Intervall.
7) *Richtig oder falsch:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ konvergiert.
8) *Richtig oder falsch:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ konvergiert.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ und *b)* $(1 + i\sqrt{3})^2$ möglichst einfach dar!

c) Zeigen Sie, daß $(1+i\sqrt{3})^{1014}$ eine reelle Zahl ist, und geben Sie an, wie viele Dezimalstellen sie vor dem Komma hat! (Hinweis: $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$)

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$!

b) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$?

• • • Bitte wenden! • • •

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

$f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 10$. Zeigen Sie, daß es ein $x \in (a,\, b)$ gibt mit $f(x) = 3$, und konstruieren Sie eine Intervallschachtelung $\big([a_n,\, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für x!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß für zwei beliebige natürliche Zahlen n, m die Zahl $(n+m)^5 - n^5 - m^5$ durch fünf teilbar ist!

b) Für zwei positive reelle Zahlen $a \le b$ ist das *geometrische Mittel* definiert als $G = \sqrt{ab}$ und das harmonische Mittel als $H = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$. Zeigen Sie, daß $a \le H \le G \le b$ ist!

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*

Entscheiden Sie für jede der hier definierten Folgen, ob sie konvergent, bestimmt oder unbestimmt divergent, beschränkt und/oder monoton ist! Geben Sie im Falle der Konvergenz, soweit möglich, auch den Grenzwert an!

a) $x_n = \dfrac{2n-3}{4n-5}$ *b)* $y_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$ *c)* $z_n = 3^n - e^n$

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert!

b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$ konvergiert!

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum, das Supremum, das Minimum und das Maximum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \ge 5\}$ *b)* $B = \{2^n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$!

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{falls } |x| < 1 \\ e^{(x+1)} & \text{falls } 1 \le |x| \le 2 \\ (x-1)e^x & \text{falls } |x| > 2 \end{cases}$$

stetig?

Abgabe bis zum Samstag, dem 8. November 2014, um 12^{00} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •