WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

31. Januar 2015

Modulklausur Analysis I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sqrt[7]{4} \in \mathbb{Q}$

Lösung: *Falsch:* Wäre $\sqrt[7]{4} = p/q \in \mathbb{Q}$, so könnten wir annehmen, daß p und q teilerfremd sind. Außerdem wäre $p^7 = 4q^7$ gerade, also auch $p = 2r$. Damit wäre $p^7 = 2^7r^7 = 4q^7$, d.h. $q^7 = 2^5r^7$ wäre gerade und damit auch q, im Widerspruch zur Gekürztheit des Bruchs p/q.

2) Richtig oder falsch: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind gleichmächtig.

Lösung: *Richtig,* denn die Abbildung $\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, die $m \in \mathbb{N}_0$ auf $\varphi(m) = m+1$ abbildet ist bijektiv; die Umkehrabbildung bildet $n \in \mathbb{N}$ ab auch $n-1$.

3) Richtig oder falsch: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die eine konvergente Teilfolge hat, ist beschränkt.

Lösung: *Falsch:* Die Folge mit $a_n = n$ für ungerade n und $a_n = 1/n$ für gerade n ist nicht beschränkt, hat aber die Folge der a_{2n} als konvergente Teilfolge.

4) Richtig oder falsch: Jede strikt monoton wachsende stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ zwar streng monoton wachsend und stetig, sie nimmt aber nur positive Werte an.

5) Richtig oder falsch: Zu jeder stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so daß $f(x_0) \le f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise kommt $f(x) = e^{-x^2}$ der Null beliebig nahe, erreicht sie aber nicht. Für jedes $x_0 \ne 0$ ist $f(2x_0) < f(x_0)$.

6) Richtig oder falsch: Die beiden reellen Zahlen x, y sind genau dann beide ganz, wenn $\cos^2 \pi x \cdot \cos^2 \pi y = 1$ ist.

Lösung: *Richtig:* Da $\cos^2$ nur Werte zwischen null und eins annimmt, ist das Produkt genau dann eins, wenn beide Faktoren eins sind, wenn also $\cos \pi x = \pm 1$ und $\cos \pi y = \pm 1$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn x und y ganz sind.

7) Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \big(\sin x \cos x\big)^2$!

Lösung:

$$\sin x\cos x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{4i}\right)^2 = -\frac{e^{4ix}-2+e^{-4ix}}{16} = \frac{1-\cos 4x}{8}$$

hat als Stammfunktion $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin 4x}{32}$.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Stellen Sie die Zahlen *a)* $(\sqrt{3}-i)^3$ *b)* $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{3015}$ und *c)* $\left|\dfrac{5+3i}{5-3i}\right|$ möglichst einfach dar!

Lösung:

a) Nach dem binomischen Lehrsatz ist $(\sqrt{3}-i)^3 = 3\sqrt{3}-3\cdot 3i+3\cdot\sqrt{3}\cdot i^2-i^3 = -8i$.

b) Damit ist $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3 = \dfrac{-8i}{2^3} = -i$, und da $3015 = 3\cdot 1005$ ist und 1005 bei Division durch vier den Rest eins hat, ist auch $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{3015} = (-i)^{1005} = -i$.

c) $\left|\dfrac{5-3i}{5-3i}\right| = \dfrac{|5+3i|}{|5-3i|} = \dfrac{\sqrt{5^2+3^2}}{\sqrt{5^2+3^2}} = 1$

d) Finden Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2+4iz-4=0$!

Lösung: Die linke Seite der Gleichung ist $(z+2i)^2$; daher ist $z=-2i$ die einzige Lösung.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Für jede natürliche Zahl n ist $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j^2-j) = \frac{n^3-n}{3}$

Lösung: Das kann am einfachsten durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang $n=1$ steht links $1^2-1=0$ und rechts $(1^3-1)/3=0$, also stimmt die Behauptung.

Ist die Behauptung für ein festes $n\in\mathbb{N}$ bewiesen, ist

$$\sum_{j=1}^{n+1}(j^2-j) = \sum_{j=1}^{n}(j^2-j)+(n+1)^2-(n+1)\,,$$

und das ist nach Induktionsannahme gleich

$$\frac{n^3-n}{3}+n^2+2n+1-n-1 = \frac{n^3-n+3n^2+3n}{3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{3}\,.$$

Die rechte Seite der zu beweisenden Formel wird für $n+1$ an Stelle von n zu

$$\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3} = \frac{n^3+3n^2+3n+1-n-1}{3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{3}\,,$$

was damit übereinstimmt. Somit gilt die Behauptung auch für $n+1$ und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion daher für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zu jeder natürlichen Zahl n, die weder durch zwei noch durch drei teilbar ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so daß $n = 6k + 1$ oder $n = 6k - 1$ ist.

Lösung: Division mit Rest durch sechs zeigt, daß sich n in der Form $6k+r$ schreiben läßt mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Im Falle $r = 0, 2$ oder 4 ist n durch zwei teilbar, für $r = 0$ oder 3 durch drei. Somit ist $r = 1$ oder $r = 5$. Falls $r = 1$, sind wir fertig; andernfalls ist $n = 6k + 5 = 6(k + 1) - 1$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Wie ist die Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert?

Lösung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen, so konvergiert auch die Folge $(\sin a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösung: Der Sinus ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion, und jede solche Funktion f bildet eine konvergente Folge mit Grenzwert a ab auf eine konvergente Folge mit Grenzwert $f(a)$.

c) Was besagt das CAUCHYsche Konvergenzkriterium für Reihen?

Lösung: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie, wenn möglich, den Grenzwert:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2 - 1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ und *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Lösung:

a) Da $\dfrac{k}{k^2 - 1} < \dfrac{k}{k^2} = \dfrac{1}{k}$ ist, ist die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante; die Reihe divergiert also.

b) Die n-te Teilsumme ist

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

und die Folge dieser Zahlen konvergiert natürlich für $n \to \infty$ gegen eins. Somit konvergiert die Reihe gegen eins.

c) Hier handelt es sich um eine alternierende Reihe; da die Beträge eine Nullfolge bilden, konvergiert sie nach dem LEIBNIZ-Kriterium. Die TAYLOR-Reihe des Logarithmus um eins ist

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

was für $x = 1$ gerade das Negative der gegebenen Reihe ist. Somit konvergiert diese gegen $-\log 2$.

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*

a) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{für } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x^3 - x) & \text{für } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{e^x - 1} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

Lösung: $f_1(x) = \sin \pi x$ als trigonometrische Funktion und $f_2(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x)$ als Polynom sind stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$. $f_3(x) = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1}$ ist zusammengesetzt aus einem Kosinus, einer Exponentialfunktion und Grundrechenarten; die Funktion ist also stetig und differenzierbar überall dort, wo nicht durch null dividiert wird. Da die Exponentialfunktion nur für $x = 0$ den Wert eins annimmt, ist f_3 also stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, insbesondere also im Bereich $x > 0$, in dem $f(x) = f_3(x)$ ist.

Somit ist f auf jeden Fall stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$; die beiden Ausnahmepunkte müssen noch untersucht werden.

An der Stelle $x = -1$ ist $f_1(-1) = \sin(-\pi) = 0$ und $f_2(-1) = \frac{1}{2}\big((-1)^3 - (-1)\big) = 0$; daher ist f auch im Punkt $x = -1$ stetig. $f_1'(-1) = -\pi \cos(-\pi) = \pi$ und $f_2'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ nimmt an der Stelle $x = -1$ den davon verschiedenen Wert eins an; daher ist f im Punkt $x = -1$ nicht differenzierbar.

An der Stelle $x = 0$ ist $f_2(x) = 0$ und f_3 ist dort nicht definiert. Wir können aber nach der Regel von DE L'HÔPITAL einen Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{e^x} = 0.$$

Somit ist f auch für $x = 0$ stetig.

$f_2'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ nimmt für $x = 0$ den Wert $-\frac{1}{2}$ an;

$$f_3(x) = \frac{\cos x}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1}$$

hat die Ableitung

$$f_3'(x) = \frac{-(e^x - 1)\sin x - e^x \cos x}{(e^x - 1)^2} + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-\sin x}{e^x - 1} - \frac{e^x(\cos x - 1)}{(e^x - 1)^2};$$

beide Summanden sind an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Nach DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{e^x} = 1$$

und
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x-1)}{(e^x-1)^2}=e^0\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2(e^x-1)e^x}\,.$$
Auch hier haben wir für $x=0$ wieder einen Ausdruck der Form „0/0“; da wir bereits wissen, daß
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=1$$
ist, erhalten wir den Wert $-\frac{1}{2}$. Somit ist der Grenzwert von $f_3'(x)$ für $x\to 0$ gleich $-1-(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$. Da dies mit $f_2'(0)$ übereinstimmt, ist f im Punkt $x=0$ differenzierbar. Somit ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und differenzierbar für $x\neq -1$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx,\qquad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\,!$

Lösung: Im Intervall $[-2,-1]$ ist $f(x)=\sin\pi x$; daher ist
$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1}\sin\pi x\,dx=\left.\frac{-\cos\pi x}{\pi}\right|_{-2}^{-1}=\frac{-\cos(-\pi)+\cos(-2\pi)}{\pi}=\frac{1+1}{\pi}=\frac{2}{\pi}\,.$$
Im Intervall $[-1,0]$ stimmt f mit f_2 überein; also ist
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^3-x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\,.$$
Das Integral von -2 bis 0 ist die Summe der Integrale von -2 bis -1 und von -1 bis 0, also $\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{1}{8}$.

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Wo ist die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^3-3x-1$ monoton wachsend, wo monoton fallend?

Lösung: $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$ ist positiv für $|x|>1$ und negativ für $|x|<1$; die Funktion ist also monoton wachsend für $x\leq -1$ und $x\geq 1$; sie ist monoton fallend für $x\in[-1,1]$.

b) Wo ist f konvex, wo konkav?

Lösung: $f''(x)=6x$ ist positiv für $x>0$ und negativ für $x<0$; die Funktion ist also konkav für $x\leq 0$ und konvex für $x\geq 0$.

c) Hat f in $\mathbb{R}$ ein absolutes Maximum und/oder Minimum?

Lösung: Da die Funktion für $x\to-\infty$ gegen $-\infty$ geht und für $x\to\infty$ gegen $+\infty$, gibt es weder ein absolutes Minimum noch ein absolutes Maximum.

d) Wo liegen relative Maxima und Minima, und welche Werte werden dort angenommen?

Lösung: Da f differenzierbar ist, muß in einem relativen Extremum $f'(x)$ verschwinden. Dies geschieht nach *a)* bei $x=\pm 1$; nach dem dort ermittelten Wachstumsverhalten der

Funktion liegt bei $x = -1$ ein relatives Maximum und bei $x = 1$ ein relatives Minimum. Die Funktionswerte sind $f(-1) = 1$ und $f(1) = -3$.

e) Zeigen Sie, daß f genau drei Nullstellen hat, und geben Sie für jede dieser Nullstellen ein Intervall der Form $[n, n+1]$ mit $n \in \mathbb{Z}$ an, das diese Nullstelle enthält!

Lösung: Da $f(x)$ vor $x = -1$ mit $f(-1) = 1 > 0$ strikt monoton wächst, während der Grenzwert $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ negativ ist, gibt es genau eine Nullstelle x_1 mit $x_1 < -1$. Da $f(-2) = -3$ negativ ist, liegt sie im Intervall $(-2, -1)$.
Im Intervall $(-1, 1)$ ist f strikt monoton fallend von $f(-1) = 1$ nach $f(1) = -3$; daher gibt es auch dort genau eine Nullstelle x_2. Da $f(0) = -1$ negativ ist, liegt sie im Intervall $(-1, 0)$.
Ab $x = 1$ schließlich ist die Funktion strikt monoton wachsend von $f(1) = -3$ nach unendlich; daher gibt es auch dort genau eine reelle Nullstelle. Wegen $f(2) = 1 > 0$ liegt sie im Intervall $(1, 2)$.

Aufgabe 7: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\cos 2x}$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wir brauchen zunächst die Ableitungen von f an der Stelle $x = 0$. Nach der Kettenregel (oder wahlweise der Quotientenregel) ist

$$f'(x) = -\frac{-2\sin 2x}{\cos^2 2x} = \frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}\,,$$

und das wiederum hat nach der Quotientenregel die Ableitung

$$f''(x) = \frac{\cos^2 2x \cdot 4\cos 2x - 2\sin 2x \cdot 2\cos 2x \cdot (-2\sin 2x)}{\cos^4 2x} = \frac{4}{\cos 2x} + \frac{8\sin^2 2x}{\cos^3 2x}\,.$$

Da der Sinus an der Stelle $x = 0$ verschwindet, während der Kosinus dort den Wert eins annimmt, ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades $1 + 2x^2$.

b) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades der Funktion $f(x) = \sin 3x \cdot \cos x$ um den Nullpunkt!

Lösung: Ausgehend von den TAYLOR-Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

erhalten wir zunächst die TAYLOR-Reihe

$$\sin 3x = 3x - \frac{27x^3}{3!} + \frac{3^5x^5}{5!} - \cdots = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 - \cdots\,,$$

die wir mit der des Kosinus multiplizieren müssen. Multiplikation mit eins ergibt als Terme vom Grad höchstens vier die Summe $3x - \frac{9}{2}x^3$, Multiplikation mit $-\frac{1}{2}x^2$ noch $-\frac{3}{2}x^3$. Die Multiplikation mit $x^4/4!$ oder noch höheren Termen führt nur auf Terme vom Grad mindestens fünf. Das TAYLOR-Polynom vierten Grades von f ist daher

$$3x - \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^3 = 3x - 6x^3\,.$$

Alternativ kann man natürlich auch die Ableitungen von $f(x) = \sin 3x \cdot \cos x$ berechnen; sie sind

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x \\
f''(x) &= -9\sin 3x \cdot \cos x - 3\cos 3x \cdot \sin x - 3\cos 3x \cdot \sin x - \sin 3x \cdot \cos x \\
&= -10\sin 3x \cdot \cos x - 6\cos 3x \cdot \sin x \\
f'''(x) &= -30\cos 3x \cdot \cos x + 10\sin 3x \cdot \cos x + 18\sin 3x \cdot \sin x - 6\cos 3x \cdot \cos x \\
&= -36\cos 3x \cdot \cos x + 28\sin 3x \cdot \sin x \\
f^{(4)}(x) &= 108\sin 3x \cdot \cos x + 36\cos 3x \cdot \sin x + 84\cos 3x \cdot \sin x + 28\sin 3x \cdot \cos x \\
&= 136\sin 3x \cdot \cos x + 120\cos 3x \cdot \sin x
\end{aligned}$$

Damit ist $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, $f'(0) = 3$ und $f'''(0) = -36$, was zum gleichen Polynom führt.

Weitere Alternative: Nach den EULERschen Formeln ist

$$\sin 3x \cdot \cos x = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{4ix} + e^{2ix} - e^{-2ix} - e^{4ix}}{4i} = \frac{\sin 2x + \sin 4x}{2}\,.$$

Nun kann man entweder die TAYLOR-Polynome vierten Grades

$$2x - \frac{8x^3}{6} \quad \text{und} \quad 4x - \frac{64x^3}{6}$$

von $\sin 2x$ und $\sin 4x$ addieren und das Ergebnis halbieren, oder aber die Ableitungen über diese Darstellung der Funktion ohne Produktregel einfacher ausrechnen.