Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

9. Dezember 2014

Modulklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sqrt[8]{8} \notin \mathbb{Q}$

Lösung: *Richtig:* Wäre $\sqrt[8]{8} = p/q \in \mathbb{Q}$, so können wir annehmen, daß p und q teilerfremd sind. Außerdem wäre $p^8 = 8q^8$; da jede Potenz einer ungeraden Zahl ungerade ist, müßte also $q = 2r$ gerade sein. (Wir können *nicht* schließen, daß p durch acht teilbar ist: Beispielsweise ist 2^8 durch acht teilbar, aber zwei nicht.) Damit wäre $p^8 = 2^8r^8 = 8q^8$, d.h. $q^8 = 2^5r^8$ wäre gerade und damit auch q, im Widerspruch zur Gekürztheit des Bruchs p/q.

Alternative Lösung: Wäre $\sqrt[8]{8} \in \mathbb{Q}$, so auch seine vierte Potenz $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, und da man in $\mathbb{Q}$ durch zwei dividieren kann, auch $\sqrt{2}$. Wir wissen aber, daß $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Richtig oder falsch: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind gleichmächtig.

Lösung: *Falsch;* da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, $\mathbb{R}$ aber nicht, ist auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar und kann somit nicht gleichmächtig mit der abzählbaren Menge $\mathbb{Q}$ sein.

3) Richtig oder falsch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sin n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Lösung: *Richtig:* Da $\sin x \in [-1, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist die Folge beschränkt, hat also nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge.

Anmerkung: Einige versuchten hier auszunutzen, daß der Sinus an allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet. Das ist zwar richtig, nützt hier aber nichts, denn die Folgenglieder sind von der Form $\sin n$ mit $n \in \mathbb{N}$, und keine natürliche Zahl ist ein ganzzahliges Vielfaches von π, da π eine irrationale Zahl ist (was in der Vorlesung allerdings nicht bewiesen wurde).

4) Richtig oder falsch: Jede strikt monoton fallende Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

Lösung: *Richtig;* Ist $x \neq y$, so ist entweder $x < y$ und somit $f(x) > f(y)$, oder $x > y$ und damit $f(x) < f(y)$. In beiden Fällen ist $f(x) \neq f(y)$.

5) Richtig oder falsch: Falls die Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist, nimmt sie auf $[a, b]$ ihr Maximum an.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise kommt $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ seinem Supremum eins zwar beliebig nahe, erreicht es aber nicht. (Nur bei *stetigen* Funktionen können wir sicher sein, daß sie auf jedem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum und ihr Minimum annehmen.)

6) *Richtig oder falsch:* Die beiden reellen Zahlen x, y sind genau dann beide ganz, wenn $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0$ ist.

Lösung: *Richtig,* denn der Sinus verschwindet genau an den ganzzahligen Vielfachen von π, und für zwei reelle Zahlen a, b ist $a^2 + b^2 = 0$ genau dann, wenn $a = b = 0$ ist.

7) Finden Sie eine Stammfunktion von $\cos^3 x$!

Lösung: $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{4} = \dfrac{\cos 3x}{4} + \dfrac{3\cos x}{4}$; daher ist

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{4}\int \cos 3x \, dx + \frac{3}{8}\int \cos x \, dx = \frac{\sin 3x}{12} + \frac{3 \sin x}{4} + C\,.$$

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{-5}}{\sqrt{5} - \sqrt{-5}}$ *b)* $(1 + i)^2$ *c)* $|3 - 4i|$ und *d)* $(-i)^{2014}$ möglichst einfach dar!

Lösung: Die Standardlösung bei *a)* wäre, daß wir so erweitern, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $\sqrt{5} + \sqrt{-5}$:

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{-5}}{\sqrt{5} - \sqrt{-5}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{-5})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{-5})(\sqrt{5} + \sqrt{-5})} = \frac{5 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{-5} - 5}{5 + 5} = \frac{10i}{10} = i\,.$$

Einfacher ist es, wenn wir zunächst durch $\sqrt{5}$ kürzen:

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{-5}}{\sqrt{5} - \sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{5} + i\sqrt{5}}{\sqrt{5} - i\sqrt{5}} = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2i}{1 + 1} = i\,.$$

b) $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

c) $|3 - 4i| = \sqrt{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

d) Da $(-i)^2 = i^2 = -1$ ist, ist $(-i)^{2014} = (-1)^{1007} = -1.$

e) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 4z - 2i + 4 = 0$!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als $(z + 2)^2 - 2i = 0$ oder $(z + 2)^2 = 2i$. Wie wir in *b)* gesehen haben, ist $(1 + i)^2 = 2i$; also ist $z = -2 \pm (1 + i)$, d.h. $z = -1 + i$ oder $z = -3 - i$.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Zeigen Sie:

a) Die n-te Ableitung von $f(x) = xe^x$ ist $f^{(n)}(x) = (n + x)e^x$

Lösung: Das kann am einfachsten durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß $f'(x) = (x + 1)e^x$ ist; das folgt sofort aus der LEIBNIZschen Produktregel und durch Ausklammern von e^x.

Ist die Behauptung für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, ist $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$, und $f^{(n+1)}(x)$ ist die Ableitung davon, also – wieder nach der Produktregel – $(x+n)e^x + e^x = (x+n+1)e^x$.

Das ist genau die Behauptung für $n + 1$; nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 - n$ durch drei teilbar.

Lösung: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$, und von diesen drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist genau eine durch drei teilbar. Also ist auch das Produkt durch drei teilbar.
Alternativ: Wir machen eine Fallunterscheidung je nach Divisionsrest von n bei der Division durch drei:
Für $n = 3k$ ist $n^3 - n = 27k^3 - 3k = 3(9k^3 - k)$.
Für $n = 3k + 1$ ist $n^3 - n = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 3k - 1 = 3(9k^3 + 9k^2 - 3k)$.
Für $n = 3k + 2$ ist $n^3 - n = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 - 3k - 2 = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2))$
Wir erhalten also stets ein Vielfaches von drei.
Auch durch vollständige Induktion läßt sich das beweisen: Für $n = 1$ ist $1^3 - 1 = 0$ durch drei teilbar, und wenn $n^3 - n$ für ein festes n durch drei teilbar ist, ist

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

auch durch drei teilbar.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Wie ist eine CAUCHY-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert?

Lösung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt CAUCHY-Folge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

b) Was besagt das Konvergenzkriterium von CAUCHY?

Lösung: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen a_n konvergiert genau dann, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist.

c) *Richtig oder falsch:* Für jede konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit reellen Summanden a_k ist die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ eine Nullfolge.

Lösung: Da die Reihe konvergiert, ist die Folge der Teilsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine CAUCHY-Folge. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$, so daß der Betrag der Differenz zwischen der n-ten und der m-ten Teilsumme kleiner ist als $\varepsilon/2$, d.h.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Dann ist auch

$$|t_{n+1}| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, d.h. $|t_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N + 1$. Somit ist die Folge der t_n eine Nullfolge.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie, wenn möglich, den Grenzwert:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \frac{1}{n+1}}$ und *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3k}$

Lösung:

a) Das ist die TAYLOR-Reihe der Exponentialfunktion an der Stelle zwei; sie konvergiert also gegen e^2. (Wenn man das nicht sieht, kann man aus dem Quotientenkriterium immerhin leicht die Konvergenz folgern, denn die Zahlen

$$\frac{2^{k+1}}{(k+1)k!} \Big/ \frac{2^k}{k!} = \frac{2^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot 2^k} = \frac{2}{k+1}$$

bilden eine Nullfolge.)

b) Da $n - 1/n < n$, ist $\frac{1}{n-1/(n+1)} > \frac{1}{n}$ für alle n, d.h. die harmonische Reihe ist eine divergente Minorante, so daß auch die gegebene Reihe divergiert.

c) Das ist eine geometrische Reihe mit $q = e^{-3}$; da dies kleiner als eins ist, konvergiert die Reihe und hat den Grenzwert $1/(1 - e^{-3})$.

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*

a) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{für } x < 0 \\ 2\cos \pi x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

Lösung: $f_1(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f_2(x) = 2\cos \pi x$ und $f_3(x) = x^2 - 2x - 2$ sind stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$. Somit ist $\mathbb{R}$ auf jeden Fall stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

An der Stelle $x = 0$ ist nach der Regel von DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1} = 2\cos 0 = 2\,,$$

und $f(0) = f_2(0) = 2\cos(\pi \cdot 0) = 2$; die Funktion ist dort also stetig.

Für $f_1'(x) = \dfrac{x \cdot 2\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$ ist, wieder nach DE L'HÔPITAL,

$$\lim_{x\to 0} f_1'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2x\sin 2x - 2\cos 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} (-\sin 2x) = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0} f_2'(x) = \lim_{x\to 0} (-2\pi \sin \pi x) = -2\pi \sin 0 = 0\,,$$

die Funktion ist dort also auch differenzierbar.

An der Stelle $x = 1$ ist $f_2(1) = 2\cos \pi = -2$ und $f_3(1) = 1 - 2 - 2 = -3$; die Funktion ist dort also nicht stetig und daher erst recht nicht differenzierbar.

b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, $\int\limits_1^3 f(x)\,dx$ und $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$!

Lösung: Im Intervall $[0, 1]$ ist $f(x) = 2\cos\pi x$; somit ist

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^2 2\cos\pi x\,dx = \left.\frac{2\sin\pi x}{\pi}\right|_0^1 = 0 - 0 = 0\,.$$

Im Intervall $[1, 3]$ stimmt f außer im Anfangspunkt mit f_3 überein; da es bei der Integration auf einzelne Punkte nicht ankommt, ist

$$\int\limits_1^3 f(x)\,dx = \int\limits_1^2 (x^2 - 2x - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x\right|_1^3 = -6 - \frac{1}{3} + 3 = -3\frac{1}{3}\,.$$

Das Integral von 0 bis 3 ist die Summe der Integrale von 0 bis 1 und von 1 bis 3, also ebenfalls $-3\frac{1}{3}$.

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Wo ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 + 4x - 3$ monoton wachsend, wo monoton fallend?

Lösung: $f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1)$ ist positiv für $x > -1$ und negativ für $x < -1$; die Funktion ist also monoton fallend für $x \le -1$ und monoton steigend für $x \ge -1$.

b) Wo ist f konvex, und wo konkav?

Lösung: $f''(x) = 12x^2 \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; die Funktion ist also überall konvex.

c) Hat f in $\mathbb{R}$ ein absolutes Maximum und/oder Minimum?

Lösung: Da die Funktion monoton fällt bis $x = -1$ und danach monoton steigt, liegt bei $x = -1$ das absolute Minimum. Ein absolutes Maximum gibt es nicht, da die Funktion für $x \to \pm\infty$ unbeschränkt wächst.

d) Wo liegen relative Maxima und Minima, und welche Werte werden dort angenommen?

Lösung: Da f differenzierbar ist, muß in einem relativen Extremum $f'(x)$ verschwinden. Dass geschieht nach *a)* nur bei $x = -1$, und dort liegt nach *b)* das absolute Minimum mit $f(-1) = 1 - 4 - 3 = -6$.

e) Zeigen Sie, daß f genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie für jede dieser Nullstellen ein Intervall der Form $[n, n+1]$ mit $n \in \mathbb{Z}$ an, das diese Nullstelle enthält!

Lösung: Da $f(x)$ vor $x = -1$ mit $f(-1) = -6$ strikt monoton fällt und danach strikt monoton steigt mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \infty$, gibt es vor und nach $x = -1$ je eine Nullstelle. Wegen $f(-2) = 16 - 8 - 3 = 5 > 0$ und $f(-1) = -6 < 0$, liegt die erste im Intervall $(-2, -1)$. $f(0) = -3$ ist negativ, aber $f(1) = 1 + 4 - 3 = 2$ positiv; daher liegt die zweite im Intervall $(1, 2)$.

Aufgabe 7: (*6 Punkte*)
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x) = \tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wir brauchen zunächst die Ableitungen von f an der Stelle $x = 0$. Die Ableitung des Tangens ist nach der Quotientenregel gleich

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,;$$

für weitere Ableitungen ist wohl, wegen der Unhandlichkeit der Quotientenregel, die zweite Form besser. Da $f(x) = \tan 2x$, ist nach der Kettenregel $f'(x) = 2 + 2\tan^2 2x$, und dessen Ableitung ist, wieder nach der Kettenregel,

$$f''(x) = 4\tan(2x) \cdot (2 + 2\tan^2 2x) = 8\tan 2x + 8\tan^3 2x\,.$$

Die Ableitung davon schließlich ist

$$f'''(x) = 8f'(x) + 8 \cdot 24 f(x)^2 f'(x) = 8\big(2 + 2\tan^2 2x\big)\big(1 + 3\tan^2 2x\big)\,.$$

Da $\tan 0 = 0$ ist, folgt $f(0) = 0$, $\quad f'(0) = 2$, $\quad f''(0) = 0 \quad$ und $\quad f'''(0) = 16$. Somit ist das TAYLOR-Polynom dritten Grades $2x + \dfrac{16}{3!}x^3 = 2x + \dfrac{8}{3}x^3$.

Nachtrag: Da viele mit Sinus und Kosinus gerechnet haben: Ausgehend von $1/\cos^2 2x$ als Ableitung des Tangens ist $f'(x) = 2/\cos^2 2x$; nach der Kettenregel, angewandt auf $1/x^2$ mit Ableitung $-2/x^3$ folgt

$$f''(x) = \frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}\,.$$

Nach der Quotientenregel, kombiniert mit der Kettenregel für die Ableitung des Nenners, ist daher

$$f'''(x) = \frac{16\cos^4 x + 48\sin^2 2x\cos^2 2x}{\cos^6 2x} = \frac{16\cos^2 2x + 48\sin^2 2x}{\cos^4 2x}\,.$$

Die Werte an der Stelle $x = 0$ sind natürlich dieselben wie bei der obigen Darstellung.
Falls man *nicht* beachtet, daß $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ ist und die Quadratsumme in der ersten Ableitung stehen läßt, schwellen natürlich in den weiteren Ableitungen die Termzahlen dramatisch an.
Gelegentlich wurde versucht, die TAYLOR-Reihen von $\sin 2x$ und $\cos 2x$ durcheinander zu dividieren. Damit dies auf eine Potenzreihe (bzw. beim Ignorieren der höheren Terme ein Polynom) führt, muß der Nenner zu einer Potenzreihe gemacht werden. Grundsätzlich ist das mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe möglich: Wegen

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^2k}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots$$

ist für betragskleine x

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots \quad \text{mit} \quad q = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \cdots\,,$$

$$\begin{aligned} \text{also} \qquad \tan 2x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \cdots\right)\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \cdots\right) \\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + 4x^3 + O(x^4) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4)\,, \end{aligned}$$

wobei $O(x^4)$ für eine Summe von Termen vom Grad mindestens vier steht.