WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

9. Dezember 2014

Modulklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sqrt[8]{8} \notin \mathbb{Q}$

2) Richtig oder falsch: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind gleichmächtig.

3) Richtig oder falsch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sin n$ hat eine konvergente Teilfolge.

4) Richtig oder falsch: Jede strikt monoton fallende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

5) Richtig oder falsch: Falls die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist, nimmt sie auf $[a, b]$ ihr Maximum an.

6) Richtig oder falsch: Die beiden reellen Zahlen x, y sind genau dann beide ganz, wenn $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0$ ist.

7) Finden Sie eine Stammfunktion von $\cos^3 x$!

Aufgabe 1: (*8 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{-5}}{\sqrt{5}-\sqrt{-5}}$ *b)* $(1+i)^2$ *c)* $|3-4i|$ und *d)* $(-i)^{2014}$ möglichst einfach dar!

e) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 4z - 2i + 4 = 0$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Die n-te Ableitung von $f(x) = xe^x$ ist $f^{(n)}(x) = (n + x)e^x$

b) Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 - n$ durch drei teilbar.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Wie ist eine CAUCHY-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert?

b) Was besagt das Konvergenzkriterium von CAUCHY?

c) *Richtig oder falsch:* Für jede konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit reellen Summanden a_k ist die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ eine Nullfolge.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie, wenn möglich, den Grenzwert:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \frac{1}{n+1}}$ und *c)* $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3k}$

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*

a) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{für } x < 0 \\ 2\cos \pi x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

b) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_1^3 f(x)\,dx$ und $\int_0^3 f(x)\,dx$!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Wo ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 + 4x - 3$ monoton wachsend, wo monoton fallend?

b) Wo ist f konvex, und wo konkav?

c) Hat f in $\mathbb{R}$ ein absolutes Maximum und/oder Minimum?

d) Wo liegen relative Maxima und Minima, und welche Werte werden dort angenommen?

e) Zeigen Sie, daß f genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie für jede dieser Nullstellen ein Intervall der Form $[n, n+1]$ mit $n \in \mathbb{Z}$ an, das diese Nullstelle enthält!

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x) = \tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ um den Nullpunkt!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 8. Dezember 2014, um 10^{00} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •