

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24–26. November 2014

a) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe der Funktion  $f(x) = x^3$  um  $x = 1$ !

**Lösung:**  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$  und  $f'''(x) = 6$ ; alle höheren Ableitungen verschwinden identisch. Somit hat die TAYLOR-Reihe nur vier Summanden:

$$f(1+h) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(1)}{3!}h^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3.$$

*Alternativ:*  $f(1+h) = (1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$

b) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von  $f(x) = e^{-x^2}$  um den Nullpunkt!

**Lösung:** Für alle  $u \in \mathbb{R}$  ist  $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$ ; also ist

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}.$$

c) Ab welchem  $n \in \mathbb{N}$  können Sie sicher sein, daß gilt  $\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{100}$ ?

**Lösung:** Nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung ist

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + e^\eta \frac{1}{(n+1)!}$$

mit einer reellen Zahl  $\eta \in (0, 1)$ . Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist hier  $e^\eta < e < 3$ . Wir müssen daher ein  $n$  finden mit  $3/(n+1)! < 1/100$  oder  $(n+1)! > 300$ . Da  $5! = 120$  und  $6! = 720$  ist, genügt  $n = 5$ .

d) Zeigen Sie durch Abschätzung mit einer geometrischen Reihe, daß  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ !

**Lösung:** Nach der Summenformel für geometrische Reihen ist

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

e) Liefert das bei d) ein besseres Ergebnis?

**Lösung:** Nach der gerade bewiesenen Ungleichung ist

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Für  $n = 4$  ist  $4 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$ , was leider nicht ganz ausreicht. Tatsächlich approximiert

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{163}{60} = 2,708\bar{3}$$

e sogar deutlich besser, aber das können wir mit unseren *a priori*-Abschätzungen nicht zeigen.

- f) Schreiben Sie  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = \frac{z_n}{n!}$  als Bruch mit Nenner  $n!$ , und zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!}$

**Lösung:** Für jede natürliche Zahl  $n$  ist

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Die linke Seite läßt sich als Bruch  $z_n/n!$  schreiben. Nach der vorigen Aufgabe ist

$$e - \frac{z_n}{n!} < \frac{1}{n!}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!}.$$

- g) Folgern Sie, daß  $e$  eine irrationale Zahl ist!

**Lösung:** Wie wir gerade gesehen haben, ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!}.$$

Wäre  $e = p/q$  eine rationale Zahl, so gäbe es eine natürliche Zahl  $n$ , für die  $q$  Teiler von  $n!$  ist, z.B.  $q$  selbst. Damit ließe sich  $e$  als Bruch mit Nenner  $n!$  schreiben, was nach obiger Ungleichung unmöglich ist.

- h)  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  sei eine Folge komplexer Zahlen, für die  $c = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  existiere. Zeigen Sie, daß die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1/c$  konvergiert!

**Lösung:** Da  $\sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \cdot \sqrt[k]{|a_k|}$  ist, konvergiert dann auch die Folge der  $\sqrt[k]{|a_k z^k|}$ ; ihr Grenzwert ist  $c|z|$ . Falls  $|z| < 1/c$  ist, ist dieser Grenzwert kleiner als eins, so daß die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergiert.

- i) Zeigen Sie mit diesem Kriterium, daß  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  konvergiert!

**Lösung:** Wie wir auf dem letzten Übungsblatt gesehen haben, ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k}} = 1.$$

Daher konvergiert die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1/1 = 1$ . Ist  $|z| = 1$  kann die Reihe konvergieren oder auch nicht: Beispielsweise konvergiert sie, für  $z = -1$ , nicht aber für  $z = 1$  (harmonische Reihe).

- j) Die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für  $a_k$ !

**Lösung:** Wir betrachten, zunächst noch ohne jede Berücksichtigung von Konvergenzproblemen, die Potenzreihe

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Da  $a_0$  verschwindet, ist

$$xR(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

und

$$x^2 R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k.$$

Somit ist

$$2xR(x) + x^2 R(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (2a_{k-1} + a_{k-2}) x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

und damit  $R(x) = a_0 + a_1 x + 2xR(x) + x^2 R(x) = 2x + (2x + x^2)R(x)$ .

Dies können wir nach  $R(x)$  auflösen und erhalten die Gleichung

$$R(x) = \frac{2x}{1 - 2x - x^2}.$$

Da die höhere Ableitung dieser Funktion sicherlich nicht angenehm zu berechnen sind, wollen wir die TAYLOR-Reihe besser über die Summenformel der geometrischen Reihe berechnen. Die Nullstellen des Nenners sind die des Polynoms  $x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$ , also  $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$  und  $1 - 2x - x^2 = -(x - x_1)(x - x_2) = -(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$ .

Für die Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe sind die Faktoren in dieser Form noch nicht ganz geeignet, denn dort haben wir einen Nenner der Form  $1 - q$ . Faktoren dieser Form können wir erreichen, indem den ersten Faktor durch  $x_1$  und den

zweiten durch  $x_2$  dividieren:  $x^2 + 2x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = x_1 x_2 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)$ .

Multipliziert man  $(x - x_1)(x - x_2)$  aus und vergleicht mit  $x^2 + 2x - 1$ , sieht man, daß  $x_1 x_2 = -1$  ist (was man natürlich auch direkt nachrechnen kann); daher ist  $1/x_1 = -x_2$  und  $1/x_2 = -x_1$ , d.h.

$$x_1 x_2 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) = -(1 + x_2 x)(1 + x_1 x)$$

und

$$\begin{aligned} 1 - 2x - x^2 &= (1 + x_2 x)(1 + x_1 x) = (1 + (-1 - \sqrt{2})x)(1 + (-1 + \sqrt{2})x) \\ &= (1 - (1 + \sqrt{2})x)(1 - (1 - \sqrt{2})x). \end{aligned}$$

Wir versuchen daher,  $R(x)$  darzustellen in der Form

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2x}{1 - 2x - x^2} = \frac{c}{1 - (1 + \sqrt{2})x} + \frac{d}{1 - (1 - \sqrt{2})x} \\ &= \frac{c(1 - (1 - \sqrt{2})x) + d(1 - (1 + \sqrt{2})x)}{1 - 2x - x^2} = \frac{(c + d) - (c(1 - \sqrt{2}) + d(1 + \sqrt{2}))x}{1 - 2x - x^2}. \end{aligned}$$

Damit der Zähler zu  $2x$  wird, muß  $c + d$  verschwinden und der Koeffizient vor  $x$  muß  $-2$  sein, d.h.  $d = -c$  und

$$c(1 - \sqrt{2}) + d(1 + \sqrt{2}) = c(1 - \sqrt{2}) - c(1 + \sqrt{2}) = -2c\sqrt{2} = -2.$$

Also ist  $c = 1/\sqrt{2}$  und  $d = -1/\sqrt{2}$ . Nach der Summenformel für die geometrische Reihe ist damit für alle  $x$  mit  $|x| < 1/(1 + \sqrt{2})$

$$\frac{2x}{1 - 2x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \sqrt{2})^k x^k - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k}{\sqrt{2}} x^k.$$

Somit sollte

$$a_k = \frac{(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{2})^k - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2})^k$$

sein, und in der Tat ist dies für  $k = 0$  die Null. Für  $k = 1$  ist

$$\frac{(1 + \sqrt{2})^1 - (1 - \sqrt{2})^1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,$$

wie gewünscht. Um zu zeigen, daß obige Formel die Lösung ist, müssen wir nur noch überprüfen, ob für  $k \geq 2$  gilt  $a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}$ . Dazu reicht es, wenn wir die entsprechende Formel für  $(1 + \sqrt{2})^k$  und für  $(1 - \sqrt{2})^k$  nachrechnen, denn wenn sie für diese beiden Terme gilt, dann auch für jede Linearkombination davon. Für  $k \geq 2$  ist

$$\begin{aligned} (1 \pm \sqrt{2})^k &= (1 \pm \sqrt{2})^{k-2} (1 \pm \sqrt{2})^2 = (1 \pm \sqrt{2})^{k-2} (1 \pm 2\sqrt{2} + 2) \\ &= (1 \pm \sqrt{2})^{k-2} (1 + 2(1 \pm \sqrt{2})) = (1 \pm \sqrt{2})^{k-2} + 2(1 \pm \sqrt{2})^{k-1}, \end{aligned}$$

wie gewünscht. Damit ist auch  $a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}$

Der Ausdruck läßt sich noch etwas vereinfachen, denn  $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ , so daß  $a_k$  einfach die nächste ganze Zahl zu  $(1 + \sqrt{2})^k / \sqrt{2}$  ist.

k) Die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_k = a_{k-1} - a_{k-2}.$$

Was ist  $a_{1000000}$ ?

**Lösung:** Wir betrachten, zunächst noch ohne jede Berücksichtigung von Konvergenzproblemen, die Potenzreihe

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Zunächst ist

$$xR(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = 3x + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

und

$$x^2 R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k.$$

Somit ist

$$xR(x) - x^2 R(x) = 3x + \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_{k-2}) x^k = 3x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

und damit  $R(x) = 3 + 5x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 3 + 2x + (x - x^2)R(x)$ .

Dies können wir nach  $R(x)$  auflösen und erhalten die Gleichung

$$R(x) = \frac{2x + 3}{1 - x + x^2}.$$

Der Nenner  $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ , hat die Nullstellen  $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ . Da der konstante Term 1 das Produkt der beiden Nullstellen ist, folgt  $x_1 x_2 = 1$ . (Studenten mit gutem Gedächtnis erinnern sich vielleicht daran, daß  $x_1$  und  $x_2$  die beiden komplexen Lösungen der Gleichung  $x^3 = -1$  sind.) Damit läßt sich der Nenner von  $R(x)$  schreiben als

$$\begin{aligned} 1 - 2x - x^2 &= (x - x_1)(x - x_2) = \frac{x - x_1}{x_1} \frac{x - x_2}{x_2} = \left(\frac{x}{x_1} - 1\right) \left(\frac{x}{x_2} - 1\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) = \left(1 - \frac{2x}{1 + \sqrt{-3}}\right) \left(1 - \frac{2x}{1 - \sqrt{-3}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}x\right) \left(1 - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}x\right). \end{aligned}$$

Wir versuchen daher,  $R(x)$  darzustellen in der Form

$$R(x) = \frac{2x+3}{x^2-x+1} = \frac{c}{1-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})x} + \frac{d}{1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})x}.$$

Nach der Summenformel für die geometrische Reihe ist dann

$$\frac{2x+3}{x^2-x+1} = c \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^k x^k + d \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^k x^k.$$

Somit sollte

$$a_k = c \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^k + d \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^k$$

sein.

Der Inhalt der Klammern, die potenziert werden, ist in beiden Fällen eine Zahl, deren dritte Potenz  $-1$  ist; falls diese Formel stimmt, ist also  $a_{k+3} = -a_k$  und  $a_{k+6} = a_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dies können wir leicht nachprüfen, wenn wir  $a_k$  für kleiner Werte von  $k$  nach der Rekursionsformel berechnen:  $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ ,  $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3 = -a_0$  und  $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5 = -a_1$ . Wegen der Linearität der Rekursion ist damit  $a_{k+3} = -a_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Da  $1\,000\,000 : 6 = 166\,666$  Rest  $4$  ist, folgt  $a_{1\,000\,000} = a_4 = -a_1 = -5$ .

- l) Die Funktion  $f$  erfülle die Gleichung  $f''(x) = -100f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ; außerdem sei  $f''(0) = 1000$  und  $f'''(0) = 0$ . Was wissen Sie über  $f(x)$ ?

**Lösung:** Wegen der Beziehung  $f''(x) = -100f(x)$  muß es nach dem Satz aus der Vorlesung reelle Zahlen  $a, b$  geben, so daß  $f(x) = a \sin 10x + b \cos 10x$  ist. Dann ist

$$f'(x) = 10a \cos 10x - 10b \sin 10x, \quad f''(x) = -100a \sin 10x - 100b \cos 10x$$

und  $f'''(x) = -1000a \cos 10x + 1000b \sin 10x$ .

Die Bedingungen  $f''(0) = 1000$  und  $f'''(0) = 0$  bedeuten also, daß  $-100b = 1000$  und  $-1000a = 0$  sein muß. Somit ist  $f(x) = -10 \cos 10x$ .

- m) Drücken Sie  $\sin^2 x$  und  $\cos^2 x$  aus durch Funktionen der Form  $\sin ax$  und  $\cos bx$ !

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

- n) Drücken Sie  $\sin 3x$  aus als Polynom in  $\sin x$  und  $\cos x$ !

**Lösung:**  $\sin 3x$  ist der Imaginärteil von

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x.$$

Somit ist  $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$ . Mit der Beziehung  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  läßt sich das noch vereinfachen zu  $\sin 3x = 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ .

- o) Drücken Sie  $\cos 3x$  aus als Polynom nur in  $\cos x$ !

**Lösung:** Nach der vorigen Aufgabe ist

$$\cos 3x = \Re e^{3ix} = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

p) Zeigen Sie: Für alle  $\varphi$  genügt  $z = \cos \frac{\varphi}{3}$  der kubischen Gleichung  $4z^3 - 3z = \cos \varphi$ !

**Lösung:** Mit  $x = \frac{\varphi}{3}$  ist nach der vorigen Lösung

$$\cos \varphi = \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4z^3 - 3z.$$

q) Zeigen Sie: Im Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend!

**Lösung:** Ein Punkt P, dessen Radius  $\overline{OP}$  mit der  $x$ -Achse einen Winkel  $\varphi$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$  einschließt, hat eine positive  $x$ -Koordinate, also ist  $\cos \varphi > 0$ . Da der Kosinus die Ableitung des Sinus ist, folgt dessen strenge Monotonie.

r) Der Arkussinus  $\arcsin x$  sei die Umkehrfunktion der Einschränkung des Sinus auf das Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Zeigen Sie, daß er für alle  $x \in [-1, 1]$  erklärt ist, und berechnen Sie seine Ableitung!

**Lösung:** Die Sinusfunktion bildet das Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  injektiv ab auf  $[-1, 1]$ ; es gibt somit eine Umkehrfunktion. Wegen der Monotonie werden auch die entsprechenden offenen Intervalle aufeinander abgebildet, und nach der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion ist deren Ableitung im Punkt  $y = \sin x$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

da  $\cos x$  im fraglichen Intervall nicht negativ wird.

s) Was ist  $i^{-i}$ ?

**Lösung:** Da  $i$  auf der imaginären Achse liegt, hat es Argument  $\pi/2$ , also ist  $i = e^{\pi i/2}$  und

$$i^{-i} = e^{\pi i/2 \cdot (-i)} = e^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{e^\pi}.$$

(BENJAMIN PEIRCE (1809–1880) sagte in seinen Vorlesungen in Harvard zu dieser Formel: *Gentlemen, we have not the slightest idea what this equation means, but we may be sure that it means something very important.* Bevor wir zuviel in dieses Ergebnis hineininterpretieren, sollten wir allerdings bedenken, daß wir auch  $i = e^{5\pi i/2}$  schreiben können und dann das Ergebnis  $i^{-1} = e^{5\pi/2}$  bekommen usw. Potenzen mit komplexer Basis und nichtganzen Exponenten sind also nicht eindeutig bestimmt.)

t) Finden Sie eine komplexe Zahl  $z$ , mit  $z^{12} = 1$ , aber  $z^n \neq 1$  für alle natürlichen Zahlen  $n < 12$ !

**Lösung:** Offensichtlich muß  $z$  den Betrag eins haben, läßt sich also darstellen in der Form  $z = e^{i\varphi}$ . Dann ist  $1 = z^{12} = e^{12i\varphi}$ , also muß  $12\varphi$  ein Vielfaches von  $2\pi$  sein, d.h.

$$\varphi = \frac{2k\pi}{12} = \frac{k\pi}{6} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Speziell im Falle  $k = 1$  ist

$$(e^{\pi i/6})^n = e^{(n/6)\pi i} \neq 1 \quad \text{für } n = 1, \dots, 11,$$

also ist  $z = e^{\pi i/6}$  eine Lösung.

u) Wie viele verschiedene Lösungen hat die vorige Aufgabe?

**Lösung:** Wie wir gesehen haben, läßt sich jedes  $z$  mit  $z^{12} = 1$  schreiben als  $z = e^{k\pi i/6}$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$ . Wenn wir zu  $k$  ein Vielfaches von zwölf addieren, ist

$$e^{(k+12m)\pi i/6} = e^{k\pi i/6 + 2m\pi i} = e^{k\pi i/6};$$

daher gibt es nur die zwölf verschiedenen Werte  $z_k = e^{k\pi i/6}$  mit  $k = 0, \dots, 11$ . Für gerades  $k$  ist  $6k\pi/6 = k\pi$  ein Vielfaches von  $2\pi$ , also ist  $z_k^6 = 1$ . Für durch drei teilbares  $k$  ist entsprechend  $z_k^4 = 1$ . Damit kommen höchstens die Werte  $k = 1, 5, 7$  und  $11$  in Frage.  $z_1$  ist eine Lösung, und damit auch  $z_{11} = 1/z_1$ . Das kleinste durch 12 teilbare Vielfache von 5 ist 60, also ist auch  $z_5$  eine Lösung und damit auch  $z_7 = 1/z_5$ . Es gibt also vier verschiedene Lösungen.

v) Drücken Sie die Funktionen  $\sin kx \cos \ell x$  für  $k, \ell \in \mathbb{R}$  aus als Linearkombination von Funktionen der Form  $\sin rx$ !

**Lösung:** Nach den EULERSchen Formeln ist

$$\begin{aligned} \sin kx \cos \ell x &= \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \cdot \frac{e^{i\ell x} + e^{-i\ell x}}{2} = \frac{e^{i(k+\ell)x} - e^{-i(k+\ell)x} + e^{i(k-\ell)x} - e^{-i(k-\ell)x}}{4i} \\ &= \frac{\sin(k+\ell)x + \sin(k-\ell)x}{2}. \end{aligned}$$