WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24–26. November 2014

a) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe der Funktion $f(x) = x^3$ um $x = 1$!

b) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x) = e^{-x^2}$ um den Nullpunkt!

c) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ können Sie sicher sein, daß gilt $\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{100}$?

d) Zeigen Sie durch Abschätzung mit einer geometrischen Reihe, daß $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

e) Liefert das bei *d)* ein besseres Ergebnis?

f) Schreiben Sie $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{z_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!}$

g) Folgern Sie, daß e eine irrationale Zahl ist!

h) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei eine Folge komplexer Zahlen, für die $c = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{i\,|a_k|}$ existiere. Zeigen Sie, daß die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1/c$ konvergiert!

i) Zeigen Sie mit diesem Kriterium, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergiert!

j) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}\,.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_k!

k) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_k = a_{k-1} - a_{k-2}\,.$$

Was ist $a_{1\,000\,000}$?

l) Die Funktion f erfülle die Gleichung $f''(x) = -100f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; außerdem sei $f''(0) = 1000$ und $f'''(0) = 0$. Was wissen Sie über $f(x)$?

m) Drücken Sie $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ aus durch Funktionen der Form $\sin ax$ und $\cos bx$!

n) Drücken Sie $\sin 3x$ aus als Polynom in $\sin x$ und $\cos x$!

o) Drücken Sie $\cos 3x$ aus als Polynom nur in $\cos x$!

p) Zeigen Sie: Für alle φ genügt $z = \cos \frac{\varphi}{3}$ der kubischen Gleichung $4z^3 - 3z = \cos \varphi$!

q) Zeigen Sie: Im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend!

r) Der Arkussinus $\arcsin x$ sei die Umkehrfunktion der Einschränkung des Sinus auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Zeigen Sie, daß er für alle $x \in [-1, 1]$ erklärt ist, und berechnen Sie seine Ableitung!

s) Was ist i^{-i}?

t) Finden Sie eine komplexe Zahl z, mit $z^{12} = 1$, aber $z^n \neq 1$ für alle natürlichen Zahlen $n < 12$!

u) Wie viele verschiedene Lösungen hat die vorige Aufgabe?

v) Drücken Sie die Funktionen $\sin kx \cos \ell x$ für $k, \ell \in \mathbb{R}$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin rx$!