Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, Zimmer C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17–19. November 2014

*a)* Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x^5 + x + 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist!

**Lösung:** $f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und eine Funktion mit positiver erster Ableitung ist streng monoton wachsend.

*b)* Welche Ableitung hat die Umkehrfunktion $g$ von $f$ im Punkt $f(2) = 35$?

**Lösung:** $g(35) = 2$ und $g'(35) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{5 \cdot 2^4 + 1} = \dfrac{1}{81}$.

*c)* Wo hat $g$ lokale Maxima und Minima?

**Lösung:** Nirgends, denn $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ kann nirgends verschwinden.

*d)* Wo ist $f$ konvex, wo konkav?

**Lösung:** $f''(x) = 20x^3$ ist negativ für $x < 0$ und positiv für $x > 0$; somit ist $x$ konkav auf $(-\infty, 0)$ und konvex auf $(0, \infty)$.

*e)* Ist die Logarithmusfunktion konvex oder konkav auf $(0, \infty)$?

**Lösung:** Die Ableitung von $\log x$ ist $1/x$, die Ableitung davon $-1/x^2$, was überall negativ ist. Somit ist die Logarithmusfunktion konkav.

*f)* Wie sieht es aus mit der Exponentialfunktion?

**Lösung:** Da diese auch gleich ihrer zweiten Ableitung ist und außerdem nur positive Werte annimmt, ist sie konvex über ganz $\mathbb{R}$.

*g)* Was ist $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$?

**Lösung:** Für $x = 1$ verschwinden sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs; nach der Regel von de l'Hôpital ist daher

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 3x^2 + 2x}{5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{3} = 1\,.$$

*h)* Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$!

**Lösung:** Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist nach der Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,,$$

denn $e^x$ wächst unbeschränkt für $x \to \infty$.

Ist die Behauptung für ein festes $n$ bewiesen, so können wir den Grenzwert für $n+1$ nach DE L'HÔPITAL berechnen als

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+1}e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = (n+1)\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

nach Induktionsannahme. Somit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

*i)* Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^n e^{-x}$?

**Lösung:** Ist $|x| < 1$, so ist die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge; da $e^x$ eine von $n$ unabhängige reelle Zahl ist, gilt dasselbe für die Folge der $x^n e^x$; der gesuchte Grenzwert verschwindet also. Für $x = 1$ ist $x^n e^{-x} = e^{-1}$ für alle $n$, und damit konvergiert die Folge auch gegen $e^{-1}$. Für $x = -1$ alterniert die Folge zwischen $e$ und $-e$, ist also unbestimmt divergent. Für $x > 1$ divergiert die Folge bestimmt gegen $+\infty$, für $x < -1$ divergiert sie unbestimmt: Die Folgenglieder werden betragsmäßig immer größer, alternieren aber beim Vorzeichen.

*j)* Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M_n \in \mathbb{R}$, so daß $e^x > x^n$ für alle $x > M_n$, und für jedes $x > 1$ aus $\mathbb{R}$ gibt es ein $N_x \in \mathbb{N}$, so daß $e^x < x^n$ für alle $n \geq N_x$.

**Lösung:** Da $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ ist, gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{R}$, so daß $x^n e^{-x} < \varepsilon = 1$ ist für alle $x > N$, also auch $x^n < e^x$. Mit $M_n = N$ gilt also die erste Behauptung.

In der zweiten behaupteten Ungleichung $e^x < x^n$ steht rechts eine von $n$ unabhängige reelle Zahl. Da die Logarithmusfunktion auf den positiven reellen Zahlen streng monoton wächst, gilt die Ungleichung die Ungleichung genau dann, wenn $\log e^x = x$ kleiner ist $\log x^n = n \log x$. Da wir $x > 1$ vorausgesetzt haben, ist $\log x > 0$; daher ist $n \log x > x$ genau dann, wenn $n > x/\log x$ ist. Somit gilt die Behauptung mit jeder natürliche Zahl $N_x > x/\log x$.

*k)* Was ist $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x}\,\log x$ ?

**Lösung:** Nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x\searrow 0} \sqrt{x}\,\log x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\log x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-(1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x\searrow 0} -2\sqrt{x} = 0\,.$$

*l)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $f(0) = 3$. Zeigen Sie: Es gibt ein $a > 0$, so daß $f(x) > 2$ für alle $x \in (-a, a)$.

**Lösung:** Wegen der Stetigkeit von $f$ gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 3| < 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta\,.$$

Damit liegt $f(x)$ für diese $x$ im Intervall $(2, 4)$, ist also insbesondere größer als zwei; wir können also $a = \delta$ setzen.

*m)* $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, und es gebe kein Teilinvervall $(c, d)$, in dem $f'(x)$ identisch verschwinde. Dann ist $f$ injektiv.

**Lösung:** Da $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist $f$ monoton wachsend. Angenommen, für zwei Zahlen $c < d$ aus $(a, b)$ wäre $f(c) = f(d)$. Für jedes $x \in (c, d)$ ist wäre dann $f(c) \leq f(x) \leq f(d) = f(c)$, d.h. $f$ wäre konstant auf dem Intervall $[c, d]$. Damit verschwände die Ableitung von $f$ identisch auf $(c, d)$.

*n)* Finden Sie ein Beispiel einer stetig differenzierbaren Funktion $f$ mit $f'(x) \geq 0$ auf ganz $\mathbb{R}$, die nicht injektiv ist!

**Lösung:** Nach der vorigen Aufgabe muß $f'$ für eine solche Funktion mindestens auf einem Teilintervall verschwinden. $f'$ könnte zum Beispiel die Funktion sein, die auf allen negativen Zahlen verschwindet und für $x \geq 0$ gleich $2x$ ist; das ist stetig auch bei $x = 0$. Eine Funktion $f$ mit dieser Ableitung ist

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

*o)* Zeigen Sie: Die $n$-te Ableitung von $x^n$ ist $n!$.

**Lösung:** Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist zu zeigen, daß die Ableitung von $f(x) = x$ gleich eins ist; das stimmt offensichtlich.

Wenn wir für ein festes $n$ wissen, daß die $n$-te Ableitung von $x^n$ gleich $n!$ ist, können wir die $(n+1)$-te Ableitung von $f(x) = x^{n+1}$ berechnen als die $n$-te Ableitung von $f'(x) = (n+1)x^n$, und das ist nach Induktionsannahme $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

*p)* Was ist die $n$-te Ableitung von $\sinh x$?

**Lösung:** Die Ableitung des *Sinus hyperbolicus* oder der *Cosinus hyperbolicus,* der wiederum den *Sinus hyperbolicus* als Ableitung hat, und so weiter. für gerade $n$ erhalten wir somit $\sinh x$ als $n$-te Ableitung, für ungerade $n$ dagegen $\cosh x$.

*q)* Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $f(x) = x^4 + x + 1$ um $x = 1$ und geben Sie explizit an, an welcher Stelle das Restglied ausgewertet werden muß!

**Lösung:** Zunächst ist

$$f'(x) = 4x^3 + 1, \quad f''(x) = 12x^2 \quad \text{und} \quad f'''(x) = 24x\,,$$

also $f(1) = 3$, $f'(1) = 5$ und $f''(1) = 12$. Also ist einerseits

$$\begin{aligned} f(1+h) &= f(1) + f'(1) \cdot h + \frac{f''(1)}{2}h^2 + \frac{f'''(1+\eta h)}{6}h^3 \\ &= 3 + 5h + 6h^2 + 4(1+\eta h)h^3 = 3 + 5h + 6h^2 + 4h^3 + 4\eta h^4 : \end{aligned}$$

andererseits ist

$$f(1+h) = (1+h)^4 + (1+h) + 1 = 3 + 5h + 6h^2 + 4h^3 + h^4\,.$$

Daher muß $\eta = \frac{1}{4}$ sein.

*r)* Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x) = \sqrt{x}$ um $x = 1$ und sein Restglied!

**Lösung:** Zunächst müssen wir die Ableitungen von $f$ berechnen; dazu arbeiten wir am besten mit der Darstellung $f(x) = x^{1/2}$:

$$f'(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}, \qquad f''(x) = -\frac{x^{-3/2}}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3x^{-5/2}}{8},$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{15x^{-7/2}}{16}, \qquad f^{(5)}(x) = \frac{105x^{-9/2}}{32}\,.$$

An der Stelle $x = 1$ sind alle $x$-Potenzen gleich eins; außerdem müssen die Ableitungen noch dividiert werden durch die Fakultäten

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24 \quad \text{und} \quad 5! = 120\,,$$

also ist

$$T_{f,1,4}(h) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4 \cdot 2} + \frac{3h^3}{8 \cdot 6} - \frac{15h^4}{16 \cdot 24} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} - \frac{5h^4}{128}\,,$$

und das Restglied ist

$$\frac{105h^5}{32 \cdot 120 \cdot (1+\eta h)^{9/2}} = \frac{7h^5}{256(1+\eta h)^{9/2}}\,.$$

*s)* Berechnen Sie daraus zunächst einen Näherungswert für $\sqrt{2}$ sowie Schranken, zwischen denen $\sqrt{2}$ garantiert liegt! Sie können dabei benutzen, daß $\sqrt{2} < 3/2$ ist.

**Lösung:** Für einen Näherungswert setzen wir einfach $h = 1$ ins TAYLOR-Polynom ein; wir erhalten

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1^2}{8} + \frac{1^3}{16} - \frac{5}{128} = \frac{128 + 64 - 16 + 8 - 5}{128} = \frac{179}{128} \approx 1{,}3984\,.$$

Für garantierte Schranken müssen wir das Restglied nach oben und nach unten abschätzen. $1+\eta$ liegt zwischen eins und zwei, und das Restglied ist als Funktion von $\eta$ monoton fallend. Daher ist

$$\frac{7}{256} \geq \frac{7}{256(1+\eta)^{9/5}} \geq \frac{7}{256 \cdot 2^{9/5}} > \frac{7}{256 \cdot 2^4 \cdot 3/2} = \frac{7}{3 \cdot 2048}$$

In Dezimalbrüchen ausgedrückt liegt das Restglied also zwischen 0,0011 und 0,0274 und

$$1{,}3995 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}4258\,.$$