WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17–19. November 2014

a) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x^5 + x + 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist!

b) Welche Ableitung hat die Umkehrfunktion g von f im Punkt $f(2) = 35$?

c) Wo hat g lokale Maxima und Minima?

d) Wo ist f konvex, wo konkav?

e) Ist die Logarithmusfunktion konvex oder konkav auf $(0, \infty)$?

f) Wie sieht es aus mit der Exponentialfunktion?

g) Was ist $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$?

h) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$!

i) Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^n e^{-x}$?

j) Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M_n \in \mathbb{R}$, so daß $e^x > x^n$ für alle $x > M_n$, und für jedes $x > 1$ aus $\mathbb{R}$ gibt es ein $N_x \in \mathbb{N}$, so daß $e^x < x^n$ für alle $n \geq N_x$.

k) Was ist $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x}\log x$?

l) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $f(0) = 3$. Zeigen Sie: Es gibt ein $a > 0$, so daß $f(x) > 2$ für alle $x \in (-a, a)$.

m) $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, und es gebe kein Teilinvervall (c, d), in dem $f'(x)$ identisch verschwinde. Dann ist f injektiv.

n) Finden Sie ein Beispiel einer stetig differenzierbaren Funktion f mit $f'(x) \geq 0$ auf ganz $\mathbb{R}$, die nicht injektiv ist!

o) Zeigen Sie: Die n-te Ableitung von x^n ist $n!$.

p) Was ist die n-te Ableitung von $\sinh x$?

q) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $f(x) = x^4 + x + 1$ um $x = 1$ und geben Sie explizit an, an welcher Stelle das Restglied ausgewertet werden muß!

r) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x) = \sqrt{x}$ um $x = 1$ und sein Restglied!

s) Berechnen Sie daraus zunächst einen Näherungswert für $\sqrt{2}$ sowie Schranken, zwischen denen $\sqrt{2}$ garantiert liegt! Sie können dabei benutzen, daß $\sqrt{2} < 3/2$ ist.