Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, Zimmer C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 10–12. November 2014

*a) Richtig oder falsch:* Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$ ist differenzierbar in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$.

**Lösung:** *Richtig:* In der Umgebung eines Punkts $x_0 > 0$ stimmt $f(x)$ mit der Polynomfunktion $x^2$ überein, in der Umgebung eines Punkte $x_0 < 0$ mit der Polynomfunktion $-x^2$. Bleibt also höchstens der Punkt $x_0 = 0$ als potentielles Problem. In dessen Umgebung ist

$$f(x_0 + h) = \begin{cases} h^2 & \text{falls } h \geq 0 \\ -h^2 & \text{falls } h \leq 0 \end{cases} = f(0) + 0 \cdot h + h \cdot |h| \ .$$

Da die Betragsfunktion stetig ist und für $h = 0$ den Wert null annimmt, ist $f$ auch im Nullpunkt differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$.

*b)* Welche Ableitung hat diese Funktion $f$?

**Lösung:** Für $x > 0$ ist $f'(x) = 2x$, für $x < 0$ ist $f'(x) = -2x$ und für $x = 0$ ist $f'(0) = 0$. Kompakt ausgedrückt ist also $f'(x) = 2\,|x|$.

*c)* Finden Sie für die folgenden Funktionen die größte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, auf denen sie definiert sind, und berechnen Sie dort die Ableitung!

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad g(x) = e^{-x^2}, \quad h(x) = 2^{2^x}, \quad k(x) = \log(4 - x^2), \quad \ell(x) = \log_{10} x\,!$$

**Lösung:** Die Funktion $f$ ist eine rationale Funktion, also überall dort definiert, wo der Nenner nicht verschwindet. Somit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Die Ableitung dort kann nach der Quotientenregel berechnet werden:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1) \cdot 2x - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \ .$$

$g$ ist als Hintereinanderausführung einer Exponentialfunktion und eines Polynoms auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar; die Ableitung errechnet sich nach der Kettenregel zu $g'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.

$h$ ist die Hintereinanderausführung der Funktion $x \mapsto 2^x$ mit sich selbst; untersuchen wir also zunächst diese Funktion. $2^x = e^{x \log 2}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat nach der Kettenregel (oder laut Vorlesung) die Ableitung $\log 2 \cdot 2^x$. Damit ist auch $h$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat nach der Kettenregel die Ableitung

$$h'(x) = \log 2 \cdot 2^{2^x} \cdot \log 2 \cdot 2^x = (\log 2)^2\, 2^{2^x} \cdot 2^x \ .$$

$k$ entsteht durch Einsetzen eines Polynoms in die Logarithmusfunktion; da letztere nur für positive Werte von $x$ definiert ist, muß $x$ so gewählt werden, daß $2 - x^2 > 0$ ist, d.h. $D = (-2, 2)$. Für $x$ aus diesem offenen Intervall errechnet sich die Ableitung nach der Kettenregel zu

$$k'(x) = \frac{1}{2 - x^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{x^2 - 2} \ .$$

Der Logarithmus zur Basis 10, schließlich, unterscheidet sich vom natürlichen Logarithmus nur um eine Konstante, ist also wie dieser auf der Menge $D$ aller positiver reeller Zahlen definiert. Da

$$\ell(x) = \log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10} \quad \text{ist, folgt} \quad \ell'(x) = \frac{1}{x \log 10} \ .$$

*d)* Berechnen Sie über die Formel $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ Näherungswerte für die Zahlen

$$x_1 = \sqrt{10} = \sqrt{9+1}, \quad x_2 = \sqrt[10]{e} = e^{0,1} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{101} = \frac{1}{100+1}\,!$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{9+1} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3\frac{1}{6} = 3,1\overline{6} \\ x_2 &= e^{0+0,1} \approx e^0 + 0{,}1e^0 = 1{,}1 \\ x_3 &= \frac{1}{100+1} \approx \frac{1}{100} - \frac{1}{100^2} = 0{,}0099 \end{aligned}$$

Korrekte *bzw.* auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte sind

$$x_1 \approx 3{,}16228, \quad x_2 \approx 1{,}10517 \quad \text{und} \quad x_3 = 0{,}\overline{0099}\,.$$

*e)* Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissensstand in Analysis I erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil $\beta$ davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit $t$ nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Gleichung $w'(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

**Lösung:** Wie wir wissen, muß eine Funktion $y(t)$, für die $y'(t) = ay(t)$ ist, ein Vielfaches der Exponentialfunktion $e^{at}$ sein. Hier haben wir eine ähnliche Gleichung; was stört, ist allerdings der Summand $-\beta$. Nun hat aber eine Konstante die Ableitung null; wenn wir die neue Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ betrachten, ist daher

$$y'(t) = w'(t) = -\gamma\, y(t), \quad \text{also} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}\,.$$

Somit ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Konstante $C$ so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist, d.h. $C = 1 - \beta$.

*f)* Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Welchen Teil seiner Kenntnisse hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach drei Monaten vergessen?

**Lösung:** In diesem Fall ist $C$ gleich 90% und $w(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma} = 0{,}6 \Longrightarrow e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \Longrightarrow \gamma = -\ln\frac{5}{9} \approx 0{,}5877866648\,.$$

Mithin ist $w(\frac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{\frac{1}{4}\ln\frac{5}{9}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt[4]{\frac{5}{9}} \approx 0{,}86334$ ungefeähr 86%. Er hat also bis zum Wiederholungstermin knapp 14% des gelernten Stoffs vergessen.

*g)* Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\mathrm{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

**Lösung:** Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinstmöglichen Zeiteinheit von 1/16 Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.

Der Seminarraum enthält $V = 40\,\mathrm{m}^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil zur (in Minuten gemessenen) Zeit $t$ gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden $30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$ Liter Luft eingeatmet;

da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das in Bezug auf das Gesamtvolumen ein Anteil von $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$. Vorher war das Sauerstoffvolumen $y(t)V$; nachher ist es

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V ,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$y'(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000}} y(t) .$$

Der Vorfaktor ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5} e^{-\frac{12 \cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5} e^{-\frac{108}{1000}} \approx 0{,}1795255193 .$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

*h)* Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$! Um welche Art von Extrema handelt es sich jeweils?

**Lösung:** Die Ableitung von $e^{-x^2}$ ist nach der Kettenregel $-2xe^{-x^2}$, die von $f(x)$ also nach der LEIBNIZschen Produktregel $f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) = 2(x - x^3)e^{-x^2}$. Da die Exponentialfumktion nur positive Werte annimmt, kann dieser Ausdruck nur verschwinden, wenn $(x - x^3) = x(1 + x)(1 - x)$ verschwindet, also für $x = 0$ und $x = \pm 1$. Für $x = 0$ ist $f(x) = 0$; da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kann bei $x = 0$ nur ein Minimum vorliegen; da $f'(x)$ für $0 < |x| < 1$ positiv ist, steigt die Funktion von dort bis zu den Punkten mit $x = \pm 1$; danach wird $f'(x)$ negativ. Somit müssen bei $\pm 1$ Maxima liegen.

*i)* Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms $f$, so sagen wir, $c$ sei eine $r$-fache Nullstelle genau dann, wenn es ein Polynom $g$ gibt mit $g(c) \neq 0$, so daß $f(x) = (x - c)^r \cdot g(x)$ ist. Zeigen Sie, daß $c$ genau dann eine mindestens zweifache Nullstelle ist, wenn $f'(c)$ verschwindet.

**Lösung:** Nach der Produktregel ist $f'(x) = r(x - c)^{r-1} g(x) + (x - c)^r g(x)$. Ist $r = 1$, so ist $(x - c)^{r-1}$ die Konstante eins, also ist $f'(c) = g(c) \neq 0$. Ist dagegen $r \geq 2$, so verschwindet auch $(x - c)^{r-1}$ im Punkt $c$, d.h. $f'c) = 0$.

*j)* Zeigen Sie, daß die Ableitung des Polynoms $f(x) = (x^2 - x)(x - 2)(x - 3)$ in jedem der offenen Intervalle $(0, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 3)$ genau eine Nullstelle hat!

**Lösung:** Da $x^2 - x = x(x - 1)$ ist, verschwindet das Polynom $f$ genau an den vier Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$. Nach dem Satz von ROLLE liegt daher in jedem der *abgeschlossenen* Intervalle $[0, 1]$, $[1, 2]$ und $[2, 3]$ mindestens eine Nullstelle von $f'$. Da alle Nullstellen von $f$ einfach sind, verschwindet $f'(x)$ dort nicht; die Nullstellen liegen also sogar in den jeweiligen offenen Intervallen. Da $f'$ als Polynom vom Grad drei höchstens drei Nullstellen hat, kann in jedem der drei Intervalle höchstens eine liegen, also genau eine.

*k)* Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - x + 3$ alle $x \in [-2, 2]$, für die $f'(x)$ gleich dem Differenzenquotienten $\dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$ ist!

**Lösung:** $f'(x) = 3x^2 - 1$, und der Differenzenquotient hat den Wert

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{(8 - 2 + 3) - (-8 + 2 + 3)}{4} = \frac{9 + 3}{4} = 3 ;$$

gesucht sind also alle $x \in [-2, 2]$, für die $3x^2 - 1 = 3$ oder $x^2 = \frac{4}{3}$ ist. Das sind die beiden Zahlen $\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.