Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3–5. November 2014

a) Richtig oder falsch: Die Menge aller streng monoton wachsender Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge der Menge alle stetiger Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{falls } x < 0 \\ x+1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

zwar streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$, ist aber bei $x = 0$ nicht stetig.

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_n = x_{n-1} + 3n - 1 \quad \text{für } n \geq 2\,.$$

Zeigen Sie: $x_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,!$

Lösung: Das kann man beispielsweise durch vollständige Induktion zeigen: Für $n = 1$ ist

$$x_1 = 2 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\,,$$

womit der Induktionsanfang gezeigt wäre.

Nehmen wir an, daß die Behauptung bereits für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen sei, so erhalten wir für x_{n+1} den Ausdruck

$$x_{n+1} = x_n + 3(n+1) - 1 \underset{\text{IA}}{=} \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} + 3n + 2 = \frac{3n^2 + n + 6n + 4}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}\,.$$

Im Induktionsschluß müssen wir zeigen, daß dies übereinstimmt mit

$$\frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{n+1}{2} = \frac{3n^2 + 6n + 3 + n + 1}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}\,,$$

und das ist offensichtlich der Fall. Damit gilt die Formel nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ könnte man das auch direkt ausrechnen: x_n ist die Summe aller Zahlen der Form $3i - 1$ für $i = 1, \dots, n$, d.h.

$$x_n = \sum_{i=1}^{n}(3i-1) = 3\sum_{i=1}^{n} i - n \cdot 1 = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{3n^2 + 3n - 2n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}\,.$$

c) Stellen Sie die reelle Zahl $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ möglichst einfach dar!

Lösung: Erweiterung mit $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ führt nach der dritten binomischen Formel auf

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})} = \frac{12 - 2\sqrt{35}}{5-7} = -6 + \sqrt{35}\,.$$

d) Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 + \overline{z}^2$ reell.

Lösung: Da die komplexe Konjugation mit der Multiplikation vertauschbar ist, können wir das auch schreiben als $z^2 + \overline{z^2}$. Die Summe der komplexen Zahl z^2 mit ihrer konjugiert komplexen ist einfach das Doppelte des Realteils, also insbesondere reell.

(Wer gerne rechnet, findet natürlich auch schnell heraus, daß der gesuchte Ausdruck für $z = x + iy$ einfach $2(x^2 - y^2)$ ist.)

e) Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \dfrac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

Lösung: Wir schreiben
$$x_n = \frac{3n+2}{2n+3} = \frac{\frac{3}{2}(2n+3) - \frac{9}{2} + 2}{2n+3} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\frac{1}{2n+3}\,.$$
Damit ist klar, daß die Folge durch $3/2$ nach oben beschränkt ist; eine untere Schranke ist z.B. die Null, denn natürlich sind alle Folgenglieder positiv. Da die Folge der Zahlen $2n+3$ streng monoton ansteigt, ist die Folge der Kehrwerte $1/(2n+3)$ streng monoton fallend; Multiplikation mit $-\frac{5}{2}$ macht daraus eine streng monoton steigende Folge, und die Addition von $\frac{3}{2}$ ändert daran auch nichts mehr. Also ist die Folge streng monoton wachsend (und wir bekommen $x_1 = 1$ als größte untere Schranke). Da die Folge der Zahlen $1/(2n+3)$ eine Nullfolge ist, folgt sofort aus den Rechenregeln für Grenzwerte, daß die Folge der x_n gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert.

f) Ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^n\dfrac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

Lösung: Für gerade n ist $y_n = x_n$, für ungerade n ist $y_n = -x_n$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist, gilt das gleiche auch für $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also auch für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen der Monotonie der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt für gerade $n < m$ aus $\mathbb{N}$ die Ungleichung $y_n < y_m$, für ungerade aber $y_n > y_m$. Damit kann die Folge nicht monoton sein. Sie kann auch nicht konvergieren, denn offensichtlich konvergiert die Teilfolge der y_n mit geraden Indizes gegen $\frac{3}{2}$, die Teilfolge mit ungeraden Indizes aber gegen $-\frac{3}{2}$.

g) Finden Sie eine konvergente, aber nicht monotone Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

Lösung: Wir können zum Beispiel die Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Indizes
$$\nu_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \le 1000 \\ 2n & \text{falls } n > 1000 \end{cases}$$
betrachten. Die Teilfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = y_{\nu_n}$ ist nicht monoton, da die ersten Tausend Glieder ständig das Vorzeichen wechseln. Sie konvergiert aber gegen $\frac{3}{2}$, denn für die Konvergenz sind nur Folgenglieder mit großem Index relevant, und für $n \ge 1000$ nähern sich die y_n immer mehr diesem Grenzwert.

h) Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum sowie das Supremum der Menge
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 5 < 0\right\}!$$

Lösung: $x^2 - 5$ ist genau dann negativ, wenn $|x| < \sqrt{5}$ ist. Somit ist $-\sqrt{5}$ eine untere und $\sqrt{5}$ eine obere Schranke von A. Ist M eine andere obere Schranke, so ist $M > 0$, da z.B. $1 \in A$, und wäre $M < \sqrt{5}$, so hätten wir für die Zahl $x = \frac{1}{2}(M + \sqrt{5})$ die Ungleichungen $0 < M < x < \sqrt{5}$. Damit wäre $x \in A$, aber $x > M$, im Widerspruch zur Schrankeneigenschaft. Somit ist $\sqrt{5}$ das Supremum von A. Genauso folgt, daß $-\sqrt{5}$ das Infimum ist, denn eine untere Schranke muß negativ sein, und wäre M eine größere untere Schranke als $-\sqrt{5}$, so wäre $-\sqrt{5} < \frac{1}{2}(M - \sqrt{5}) < M$, d.h. wir hätten ein Element von A, das größer als M ist.

i) Drücken Sie die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2}\log x} \end{cases}$ einfacher aus! ($\mathbb{R}_{>0} \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$)

Lösung: Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, ist auch $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist

$$f(x)^2 = f(x) \cdot f(x) = e^{\frac{1}{2}\log x} \cdot e^{\frac{1}{2}\log x} = e^{\log x} = x$$

für alle x. Somit ist $f(x) = \sqrt{x}$.

j) Finden Sie für die Funktion $f(x) = (100x)^2$ für $x = 0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ist, falls $|y - x| < \delta$!

Lösung: $|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(0)| = |f(y)| = (100y)^2 < \varepsilon$ genau dann, wenn

$$y < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{100}$$

ist. Also können wir $\delta = \sqrt{\varepsilon}/100$ setzen.

k) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{e^x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Lösung: *Richtig,* denn wie aus der Vorlesung bekannt, ist die Exponentialfunktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$, und setzt man eine stetige Funktion in eine andere sein, so ist auch diese Hintereinanderausführung stetig.

l) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf dem Intervall $[-10, 10]$!

Lösung: $f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ kann offensichtlich keine kleineren Werte als zwei annehmen; wegen $f(-1) = 2$ wird dieser Wert angenommen und ist somit das Minimum. Da der Graph von f eine Parabel ist, wächst die Funktion monoton, wenn man sich vom Punkt $x = -1$ entfernt; das Maximum wird daher an einem der beiden Intervallränder angenommen. Da $f(-10) = 9^2 + 2$ und $f(10) = 11^2 + 2$, ist das Maximum somit $11^2 + 2 = 123$.

m) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \exp\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$!

Lösung: Die Folge der Terme

$$\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(n^3+1)-2}{n^3+1} = 1 - \frac{2}{n^3+1}$$

konvergiert gegen eins; wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion konvergiert die Folge der x_n daher gegen $e^1 = e$.

n) Richtig oder falsch: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \log(n+1) - \log n$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig,* denn

$$x_n = \log(n+1) - \log n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

und die Folge der Terme $1 + \frac{1}{n}$ konvergiert gegen eins. Wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion konvergiert daher die Folge der Logarithmen gegen $\log 1 = 0$.

o) Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl $x \in [-1, 1]$ mit der Eigenschaft $e^x = x^2$

Lösung: Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^x - x^2$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Am linken Intervallende ist $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, am rechten ist $f(x) = e - 1 > 0$, da $e > 1$ ist. Wegen der Stetigkeit der von f (Summe der Exponentialfunktion und eines Polynoms) gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$, und für diese Zahl x gilt die Gleichung $e^x = x^2$.

p) Zeigen Sie: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ konvergiert für alle $n \geq 2$!

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, daß dies für $n = 2$ gilt; für $n \geq 2$ ist $k^n \geq k^2$, also $1/k^n \leq 1/k^2$. Somit ist die Reihe für $n = 2$ eine konvergente Majorante für jede Reihe mit $n \geq 2$.

q) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

Lösung: *Falsch,* denn die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist eine divergente Minorante.

r) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn die Folge der $1/\sqrt{k}$ ist monoton fallend, so daß die Reihe nach dem LEIBNIZ-Kriterium für alternierende Reihen konvergiert.

s) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert!

Lösung: Für $x = 0$ konvergiert die Summe gegen Null; für $x \neq 0$ können wir beispielsweise versuchen, das Quotientenkriterium anzuwenden: Der Betrag des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Summanden ist

$$\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Big/ \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{x^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot x^k} \right| = \left| \frac{x}{k+1} \right| .$$

Die ist für jedes x eine Nullfolge; also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut.

t) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 - \frac{1}{k}} \right)^k$ konvergiert!

Lösung: Hier könnte das Wurzelkriterium nützlich sein: Die k-te Wurzel des k-ten Summanden ist $\dfrac{1}{2 - \frac{1}{k}}$, und da dies für $k \to \infty$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert, folgt aus dem Wurzelkriterium die (absolute) Konvergenz der Reihe.